Introducción al Cálculo Integral

José Luis Alejandre Marco
Ana Isabel Allueva Pinilla
José Miguel González Sántos

versión digital basada en el libro "Introducción al Cálculo Integral" ISBN 8-7733-503-6, de los mismos autores

Índice

Volver
Índice

Prólogo

Lo que se oye se olvida.
Lo que se ve se recuerda.
Lo que se hace se aprende.

Proverbio chino

Este texto ha sido elaborado a partir de las explicaciones y problemas de clase de los distintos cursos impartidos en los últimos años por los autores en su labor docente en el seno del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Zaragoza.

Introducción al cálculo integral está pensado para ser utilizado en un curso inicial de cálculo infinitesimal destinado a estudiantes de ingeniería, matemáticas, ciencias químicas y ciencias físicas.

El objetivo de este texto docente es conseguir que el alumno/a domine el cálculo integral, herramienta básica en todas las ramas de la ciencia y la tecnología.

Sin abandonar el rigor formal en la exposición, hemos procurado hacer asequible cada cuestión mediante ejemplos y ejercicios. Desde luego, no hacemos ninguna aportación nueva, a no ser un pretendido cuidado en el aspecto didáctico en un intento de que los estudiantes rompan con su rol habitual de espectadores-oyentes, cumplidores de actividades mecanicistas, y consigan una dinámica nueva de trabajo.

Para el estudio del contenido de este texto no se presupone ningún conocimiento previo de cálculo integral, con lo que es asequible a todos los alumnos/as desde el primer momento. Es decir, un estudiante con interés puede seguir las explicaciones con facilidad. Se han incluido las demostraciones de aquellos resultados que consideramos formativos y que desarrollan la capacidad de razonamiento lógico y de análisis crítico. A lo largo de todo el texto hay gran cantidad de ejemplos que ayudan a entender y asimilar los resultados presentados. Cada capítulo finaliza con una lista de ejercicios propuestos, que ayudará a cimentar los conocimientos adquiridos y debe servir para comprobar que realmente se ha comprendido y asimilado el contenido del capítulo.

Damos las gracias a los alumnos/as, porque con su querer saber nos han mostrado aquellas partes en las que encuentran mayores dificultades. Esperamos que este texto sea de ayuda para los futuros estudiantes del cálculo integral.

Los autores.

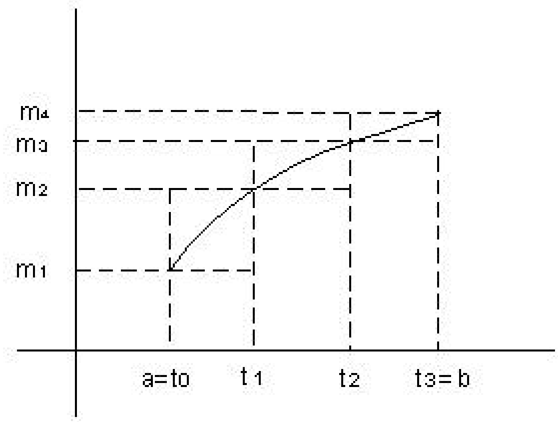
Volver
Índice

Capítulo 1
Integral de Riemann

http//sciencieword.wolfram.com/biography/Riemann.html

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

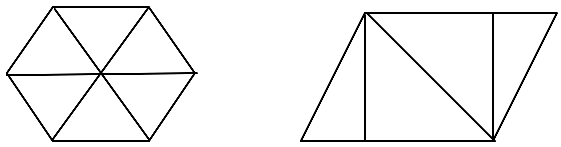


Capítulo 1
Integral de Riemann

1.1. Introducción

Volver
Índice

El cálculo integral tiene su origen en el estudio del área de figuras planas; las fórmulas para el cálculo de las áreas de triángulos y rectángulos eran ya conocidas en la Grecia clásica, así como la de los polígonos regulares previa descomposición en triángulos.

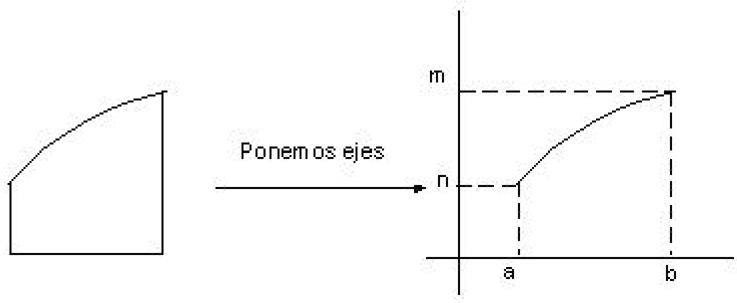


El problema se plantea a la hora de calcular áreas de figuras limitadas por líneas curvas. Euclides (300 a.C.) sigue los trabajos de Eudoxio (400-355 a.C.) para calcular el área del círculo por el método de *exhaución*, es decir, inscribiendo en él sucesivamente polígonos con más lados. La suma de estas áreas se aproximaba cada vez más al área del círculo, estando en el «límite» el valor exacto. Demostró además que, dados dos círculos de áreas A_1 y A_2 y radios r_1 y r_2, se verificaba que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$ y que $A = kr^2$, siendo k una constante que Arquímedes llamó π y cuyo valor dijo hallarse entre $\frac{22}{7} > \pi > \frac{223}{71}$. Arquímedes (287-212 a.C.) halló también el área encerrada por un arco de parábola y la cuerda correspondiente, cosa realmente difícil en aquel tiempo, ya que no se disponía del álgebra formalizada ni de la geometría analítica. El método utilizado era el de *agotamiento*, esto es, se encaja el área entre dos polígonos, uno inscrito en la región y otro circunscrito a la región.

Desde los griegos hasta el siglo XVII poco se hizo con relación al cálculo de áreas y volúmenes de figuras limitadas por líneas o superficies cerradas. Pascal, Fermat y Leibniz comienzan un estudio engarzado con el cálculo diferencial; así pues, aunque históricamente se estudian los primeros elementos del cálculo integral antes que el diferencial, en el siglo XVII se estudian y configuran a la par, relacionándose por medio de muchos e importantes

resultados. Por esto la mayoría de los autores empiezan exponiendo, en primer lugar, al menos, las primeras nociones de cálculo diferencial, antes de comenzar el estudio del cálculo integral.

Veamos cuál sería la metodología a emplear para el cálculo de áreas de superficies como las siguientes:

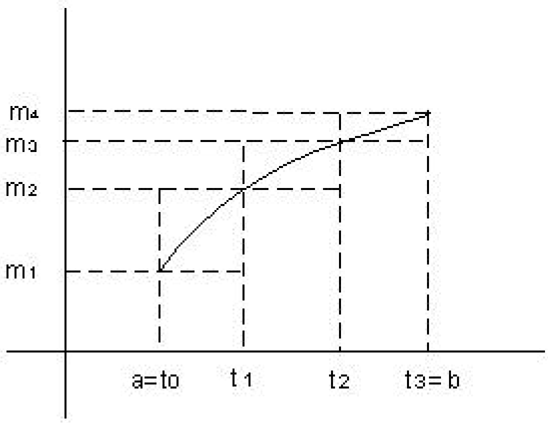


Podemos considerar el lado curvo como la gráfica de una función $y = f(x)$. Si llamamos A al área de la figura, se cumplirá que:

$$(b-a)n < A < (b-a)m$$

Pero esto no nos aporta en muchas ocasiones una idea suficientemente aproximada del valor de A. Supongamos que el intervalo $[a, b]$ lo dividimos en tres partes:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = b$$



Entonces, el valor del área que buscamos queda acotado entre dos cantidades:

$$s = (t_1 - t_0)m_1 + (t_2 - t_1)m_2 + (t_3 - t_2)m_3 < A$$

$$A < (t_1 - t_0)m_2 + (t_2 - t_1)m_3 + (t_3 - t_2)m_4 = S$$

Si aumentamos el número de puntos en la división de [*a*, *b*], cada vez se irán acercando más los valores de *s* y *S*, de modo que nos darán una información más precisa sobre *A*.

Ésta sería la idea intuitiva, puesto que trabajaremos con funciones reales de variable real.

1.2. Partición

Volver
Índice

Llamaremos *partición P* del intervalo [*a*, *b*] a un conjunto finito de puntos $P = \{ t_0, t_1, \ldots, t_n \}$ tal que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Si $y = f(x)$ es una función definida y acotada en [*a*, *b*], designaremos por

$$\begin{cases} m_i = \inf \{ f(x) \ni t_{i-1} \le x \le t_i \} \\ M_i = \sup \{ f(x) \ni t_{i-1} \le x \le t_i \} \end{cases}$$

Notemos que estos valores existen, pues $f(x)$ es acotada. Además, a través de estos ínfimos y supremos de la función se definen:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$$
$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$$

como las sumas inferior y superior, respectivamente, de $f(x)$ correspondientes a la partición P. Estos valores son siempre números reales, y para cada partición P distinta existirán, obviamente, distintas sumas inferiores y superiores.

Nótese que siempre se tiene que $s(f, P) \leq S(f,P)$ para la misma partición P, puesto que $m_i \leq M_i$ para todo i.

Podríamos tomar particiones más *finas* y así demostrar que cualquier suma inferior está acotada superiormente por cualquier suma superior. Se define a continuación este concepto.

Volver
Índice

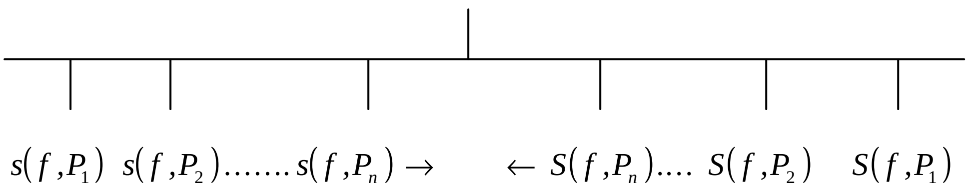
1.3. Definiciones

Se dice que una *partición* P de $[a, b]$ es *más fina* que otra Q si contiene los mismos puntos de ésta y, al menos, uno más. Se denota $Q \subset P$.

Dada $\{P_i\}_{i=1}^{n}$, una familia de particiones del intervalo $[a, b]$ tales que $P_i \subseteq P_{i+1}$ para todo i, se tiene que

$$s(f, P_i) \leq s(f, P_{i+1})$$
$$S(f, P_i) \geq S(f, P_{i+1})$$

Así se generan dos sucesiones, una $\{s(f, P_i)\}$ creciente y otra $\{S(f, P_i)\}$ decreciente. Además, como $s(f,P) \leq S(f,Q)$ para cualesquiera dos particiones de $[a, b]$, obtenemos una representación en la recta real de estas dos sucesiones:



Intuitivamente, se ve que, si $n \to \infty$ y ambas sucesiones convergen, entonces coinciden los dos límites, cuyo valor será el del área buscada.

Volver Riemann

Volver Índice

1.4. Integral de Riemann

Si $sup\ \{s(f\ ,P)\} = inf\ \{S(f\ ,P)\}$ para toda partición P de $[a, b]$, diremos que $y = f(x)$ es una función *integrable de Riemann* en $[a, b]$, abreviadamente $f(x) \in R([a, b])$, y a ese valor se le llamará integral (de Riemann) de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, denotándola por:

$$\int_a^b f = sup\ \{s(f, P)\} = inf\ \{S(f, P)\}$$

Obsérvese que la integral de Riemann, caso de existir, de una función toma un valor real.

1.5. Teorema

$y = f(x)$ es una función integrable Riemann $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists$ una partición $P \ni S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Demostración

$\Rightarrow$] Sea $f \in R([a, b])$, y sea $\varepsilon > 0$

$$\int_a^b f = sup\ \{s(f, P)\} \Rightarrow \exists\ P_1 \text{ partición de } [a, b] \ni \int_a^b f - s(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b f = inf\ \{S(f, P)\} \Rightarrow \exists\ P_2 \text{ partición de } [a, b] \ni -\int_a^b f + S(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sumando ambas desigualdades, miembro a miembro, se llega a:

$$S(f, P_2) - s(f, P_1) < \varepsilon$$

Sea $P = P_1 \cup P_2$, entonces:

$$s(f, P_1) \le s(f, P) \le S(f, P) \le S(f, P_2)$$

con lo que tenemos que:

$$S(f,P)-s(f,P)\le S(f,P_2)-s(f,P_1)<\varepsilon \qquad \text{(c.q.d.)}$$

<=] Sabemos que $inf\,\{S(f, P)\} \le S(f, P)$ para cualquier P
$sup\{s(f, P)\} \ge s(f, P)$ para cualquier P

Entonces, se tiene

$$0 \le inf\,\{S(f, P)\} - sup\{s(f, P)\} \le S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

por hipótesis. Lo que nos lleva a que:

$$inf\,\{S(f, P)\} = sup\{s(f, P)\} \Rightarrow f \in R([a, b]) \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Volver Índice

1.6. Algunas propiedades de la integral de Riemann

1) $f \in R([a, b]) \Leftrightarrow \forall\, c \in (a, b)$, $f(x)$ es integrable en cada uno de los intervalos $[a, c]$, $[c, b]$. Además se verifica que:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2) Si $f \in R([a, b])$, entonces $kf \in R([a, b])$, donde k es una constante cualquiera. Además se verifica que:

$$\int_a^b kf = k \int_a^b f$$

3) Si $f, g \in R([a, b])$, entonces $f + g \in R([a, b])$. Además se verifica que:

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

4) Si $f \in R([a,b])$ y $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

Si $f \in R([a,b])$ y $f(x) \leq 0 \ \forall \ x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq 0$

5) Si $f, g \in R([a,b])$ y $f(x) \leq g(x) \ \forall \ x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

6) Si $f \in R([a,b])$ y se tiene que $|f| \in R([a,b])$ también, siendo $|f|$ la función definida por $|f|(x) = |f(x)| \ \forall \ x \in [a,b]$, entonces se tiene que:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \qquad \text{(Monotonía de la integral definida)}$$

La conexión entre el cálculo diferencial y el cálculo integral se tiene por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (conocido también como Regla de Barrow).

1.7. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Si una función $y = f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Volver
Índice

donde $F(x)$ es cualquier función tal que $F'(x) = f(x) \ \ \forall \ x \in [a,b]$.

1.8. Teorema del valor medio para integrales

Si $y = f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces existe un valor intermedio $c \in (a, b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Volver
Índice

1.9. La función integral

La integral es un número si la calculamos sobre un intervalo $[a, b]$, donde a y b son números reales y fijos. Ahora bien, si dejáramos libertad al extremo b, podríamos estudiar la integral de una función $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, x]$, donde x es variable. Por lo tanto, la integral, al depender de x, sería variable también, dependiendo a su vez de x, es decir, sería una función de x. Es lo que llamaremos *función integral*, denotándola $F(x) = \int_a^x f$.

1.10. Función primitiva o antiderivada

El problema de calcular $\int f(x)\,dx$ se reduce a encontrar una función $F(x)$, llamada *primitiva* de $f(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$$

donde C es una constante arbitraria.

Si $P(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se tiene que $P'(x) = f(x)$, o, equivalentemente, utilizando la notación diferencial de Leibniz, $\frac{dP(x)}{dx} = f(x)$, es decir, $dP(x) = f(x)\,dx$ (combina la notación diferencial con la integral). Así, $\int f(x)\,dx = P(x) + C$.

A pesar de la semejanza aparente, el símbolo $\int f(x)\,dx$, es conceptualmente distinto del símbolo de integración $\int_a^b f(x)\,dx$. Los dos han sido originados por procesos completamente distintos: la diferenciación y la integración.

Sin embargo, están relacionados por los teoremas fundamentales del cálculo. El Primer Teorema Fundamental dice que se puede construir siempre por integración una primitiva de una función continua (dos primitivas difieren en una constante).

Esto indica que cualquier integral indefinida de $y = f(x)$ es también primitiva de $y = f(x)$. Si $P(x) = \int_{x_o}^{x} f(t)\,dt$ con x_0 cierto límite inferior, $\int f(x)\,dx = P(x) + C$ se puede poner como $\int f(x)\,dx = \int_{x_o}^{x} f(t)\,dt + C$.

El símbolo $\int f(x)\,dx$ se puede considerar como representante de una integral indefinida de $y = f(x)$ más una constante.

Volver Segundo Teorema

El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral expresa que para cada primitiva $P(x)$ de $y = f(x)$ y para cada constante C se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\mathrm{P}(\mathrm{x}) + C]_a^b$$

Si se sustituye $P(x) + C$ por $\int f(x)\,dx$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = F(b) - F(a), \text{ con } F'(x) = f(x)$$

Debido a una larga tradición, muchos tratados de cálculo consideran el símbolo $\int f(x)\,dx$ como representante de una integral indefinida y no de una función primitiva o antiderivada.

Volver
Índice

Capítulo 2
Integrales: Introducción y propiedades

$$\int K\cdot f\left(x\right)dx = K\int f\left(x\right)dx$$

$$\int 2\cdot \operatorname{sen} x\,dx$$

$$\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Capítulo 2
Integrales: Introducción y propiedades

2.1. Introducción

Volver primitiva

Una de las cuestiones esenciales que trata el cálculo integral es la siguiente: «Encontrar las funciones $F(x)$ que tienen como derivada una función dada $f(x)$ que se supone continua en un intervalo cerrado $[a, b]$».

Nuestro objetivo es, pues, calcular funciones $F(x)$ conociendo su derivada $f(x)$. Las funciones que buscamos, llamadas *funciones primitivas de la función* $f(x)$, verificarán, por tanto, la igualdad: $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo

$F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x) = 2x$, ya que $\left(x^2\right)' = 2x$.

Se puede verificar fácilmente por derivación que la función $f(x) = 2x + 5$ admite como funciones primitivas distintas a:

$F_1(x) = x^2 + 5x$; $F_2(x) = x^2 + 5x + 3$; $F_3(x) = x^2 + 5x + C$, siendo C = constante.

Volver Índice

Este ejemplo nos muestra que una función dada puede admitir una infinidad de primitivas. Supondremos en lo que sigue que una función continua admite al menos una función primitiva.

2.2. Teorema

Si una función $y = f(x)$ admite una función primitiva, $F(x) \Rightarrow$ admite infinitas funciones primitivas. Se trata de las funciones $G(x) = F(x) + C$, donde C = constante.

Demostración

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$$

Notación

Denotaremos a todas las funciones primitivas de $y = f(x)$ por el símbolo $\int f(x)\,dx$, que se denomina *integral indefinida* de $f(x)$.

Utilizando las notaciones precedentes se obtiene la siguiente equivalencia:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow f(x) = F'(x)$$

2.3. Propiedades

1) Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ admiten, respectivamente, por primitivas a las funciones $F(x)$ y $G(x)$, la función $f(x) + g(x)$ admite por función primitiva a la función $F(x) + G(x)$.

Sean $F(x)=\int f(x)\,dx$ y $G(x)=\int g(x)\,dx$, entonces:

$[F(x)+G(x)]'=F'(x)+G'(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow \int [f(x)+g(x)]\,dx = F(x)+G(x)$

Luego:

Volver
Índice

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

2) Si la función $f(x)$ admite como primitiva a la función $F(x)$ y k es una constante arbitraria, la función $kf(x)$ admite como primitiva a la función $kF(x)$.

$$[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x) \Rightarrow \int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

2.4. Ejemplos

1) $\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = 3\,\frac{x^2}{2} + 3C = \frac{3}{2}\,x^2 + C_1$

2) $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

3) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\,x^{3/2} + C$

4) $\int 2\operatorname{sen}x\,dx = 2\int \operatorname{sen}x\,dx = 2(-\cos x) + C = -2\cos x + C$

5) $\int 1dx = \int dx = x + C$

6) $\int (x+2)\,dx = \int x\,dx + \int 2dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$

7) $\int (3x^4 - 5x^2 + x)\,dx = 3\,\frac{x^5}{5} - 5\,\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

8) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{1/2}dx + \int x^{-1/2}dx =$

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$$

En muchas aplicaciones de la integración se nos da la suficiente información como para determinar una solución particular. Para ello sólo necesitamos conocer el valor de $F(x)$ para un cierto valor de x.

9) Hallar la solución general de la ecuación $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ y calcular la solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 2$.

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Ahora como $F(1) = 2 \Rightarrow F(1) = \frac{-1}{1} + C = 2 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{x} + 3$

10) *Una aplicación relacionada con la gravedad*

Se tira hacia arriba una pelota con una velocidad inicial de 64 m/s, desde una altura de 80 m. Hallar la función posición, $s(t)$, para este movimiento. (Recordar que la aceleración debida a la gravedad es -10 m/s^2).

Solución: Suponemos que $t = 0$ representa el tiempo inicial. Por tanto, las dos condiciones iniciales impuestas en el problema pueden ser escritas como:

$s(0) = 80$ m	altura inicial
$s'(0) = 64$ m/s	velocidad inicial

Ahora, del valor de la aceleración tenemos que:

$$s''(t) = -10 \text{ m}/s^2 \Rightarrow s'(t) = \int s''(t)dt = \int -10dt = -10t + C_1$$

donde

$$C_1 = s'(0) = 64 \quad \Rightarrow s'(t) = -10t + 64$$

Por tanto,

$$s(t)=\int s'(t)dt=\int(-10t+64)dt=-10\frac{t^2}{2}+64\,t+C_2$$

donde $C_2 = s(0) = 80$

Finalmente, obtenemos que la función de posición queda determinada por:

$$s(t)=-5t^2+64t+80$$

11) $\int \frac{2}{\sqrt{x}}dx=2\int x^{-1/2}dx=2\frac{x^{1/2}}{1/2}+C=4\sqrt{x}+C$

12) $\int(x^2+1)^2dx=\int(x^4+2x^2+1)dx=\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+C$

13) $\int\frac{x^3+3}{x^2}dx=\int\frac{x^3}{x^2}dx+\int\frac{3}{x^2}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x}+C$

14) $\int\sqrt[3]{x}(x-4)\,dx=\int x^{4/3}dx-\int 4x^{1/3}dx=\frac{x^{7/3}}{7/3}-4\frac{x^{4/3}}{4/3}+C=$

$$=\frac{3}{7}x^{7/3}-3x^{4/3}+C=\frac{3}{7}x^{4/3}(x-7)+C$$

Volver
Índice

2.5. Integración de una función compuesta

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones que satisfacen las condiciones de derivación de la regla de la cadena para la función compuesta $y = f(g(x))$. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C$$

Ejemplos

1) $\int(x^2+1)^2\,2x\,dx=\frac{(x^2+1)^3}{3}+C$

2) $\int 5\cos 5x\,dx=\operatorname{sen}5x+C$

Nota

Muchas funciones a integrar contienen la parte esencial de $g'(x)$ pero les falta alguna constante numérica multiplicando o dividiendo. En estos casos podemos obtener la constante numérica que falta sin más que multiplicar y dividir dicha función por esa constante, para luego aplicar la propiedad de linealidad de la integración, como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$\int x\left(x^2+1\right)dx = \int \left(x^2+1\right)\frac{1}{2}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)2x\,dx = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^3}{3} + C =$$

$$= \frac{\left(x^2+1\right)^3}{6} + C$$

$$\int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\int 5\cos 5x\,dx = \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + C$$

Atención

La operación de multiplicar y dividir no se puede realizar cuando el múltiplo que falta para tener $g'(x)$ contiene a la variable x, debido a que no se puede mover fuera de la integral ninguna parte del integrando que contenga a la variable respecto de la cual estamos integrando.

Volver Indefinida

Para el cálculo de integrales indefinidas de funciones compuestas, hay que tener muy presente la tabla de integrales inmediatas, e intentar llevar la función a integrar a alguna de las formas que allí se ven. Para ello, basta aplicar las propiedades vistas aquí de la integral indefinida y ajustar constantes como se ha comentado anteriormente.

Ejercicios propuestos

Volver
Índice

1) $\int x^2 \left(3x^3 + 14\right)^3 dx = \frac{1}{36}\left(3x^3 + 14\right)^4 + C$

2) $\int \sqrt[5]{5x+6}\, dx = \frac{1}{6}(5x+6)^{6/5} + C$

3) $\int \frac{17x}{\sqrt[3]{6x^2+8}}\, dx = \frac{51}{24}\left(6x^2 + 8\right)^{2/3} + C$

4) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C$

5) $\int \frac{dx}{(3x+1)^4} = -\frac{1}{9}(3x+1)^{-3} + C$

6) $\int \cos x \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + C$

7) $\int \frac{x+3}{\left(x^2+6x\right)^{1/3}}\, dx = \frac{3}{4}\left(x^2 + 6x\right)^{2/3} + C$

8) $\int x^2\, 7^{x^3+5}\, dx = \frac{1}{3\operatorname{Log} 7}\, 7^{x^3+5} + C$

9) $\int \cos 3x\; e^{\operatorname{sen} 3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{\operatorname{sen} 3x} + C$

10) $\int \frac{x}{3x^2+2}\; 5^{\operatorname{Log}\left(3x^2+2\right)}\, dx = \frac{1}{6\operatorname{Log} 5}\; 5^{\operatorname{Log}\left(3x^2+2\right)} + C$

11) $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\text{Log}\left(x^2+1\right)+C$

12) $\int \frac{dx}{\text{tg}x} = \text{Log}(\text{sen}x)+C$

13) $\int \frac{7^{2x}}{7^{2x}+5}dx = \frac{1}{2\text{Log}7}\text{Log}\left(7^{2x}+5\right)+C$

14) $\int \frac{x}{\sqrt{1-6x^4}}dx = \frac{1}{2\sqrt{6}}\text{arcsen}\left(\sqrt{6}\,x^2\right)+C$

15) $\int \frac{x^3}{1+x^8}dx = \frac{1}{4}\text{arctg}\left(x^4\right)+C$

16) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\text{sen}\sqrt{x}+C$

17) $\int \frac{\text{sen}(\text{Log}x)}{x}dx = -\cos(\text{Log}x)+C$

18) $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left(1-2x^2\right)^{3/2}+C$

19) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}dx = \frac{4}{9}\left(x^3+2\right)^{3/4}+C$

20) $\int \left(4-x^{2/3}\right)^3 dx = 64x+\frac{36}{7}x^{7/3}-\frac{144}{5}x^{5/3}-\frac{1}{3}x^3+C$

21) $\int \frac{\left(2-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx = -\frac{2}{3}\left(2-\sqrt{x}\right)^3+C$

22) $\displaystyle\int \frac{3x^4}{\sqrt{5x^5+7}}\,dx = \frac{6}{25}\sqrt{5x^5+7} + C$

23) $\displaystyle\int \left(\frac{\sqrt{x}}{x} - 3x\,\sqrt[3]{x} + 7 \right) dx = 2\sqrt{x} - \frac{9}{7}x^{7/3} + 7x + C$

24) $\displaystyle\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + C$

25) $\displaystyle\int \operatorname{sen}3x\,\sqrt[3]{\cos 3x}\,dx = -\frac{1}{4}(\cos 3x)^{4/3} + C$

26) $\displaystyle\int e^{1/x}\frac{1}{x^2}\,dx = -e^{1/x} + C$

27) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}3x}{3+\cos 3x}\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{Log}(3+\cos 3x) + C$

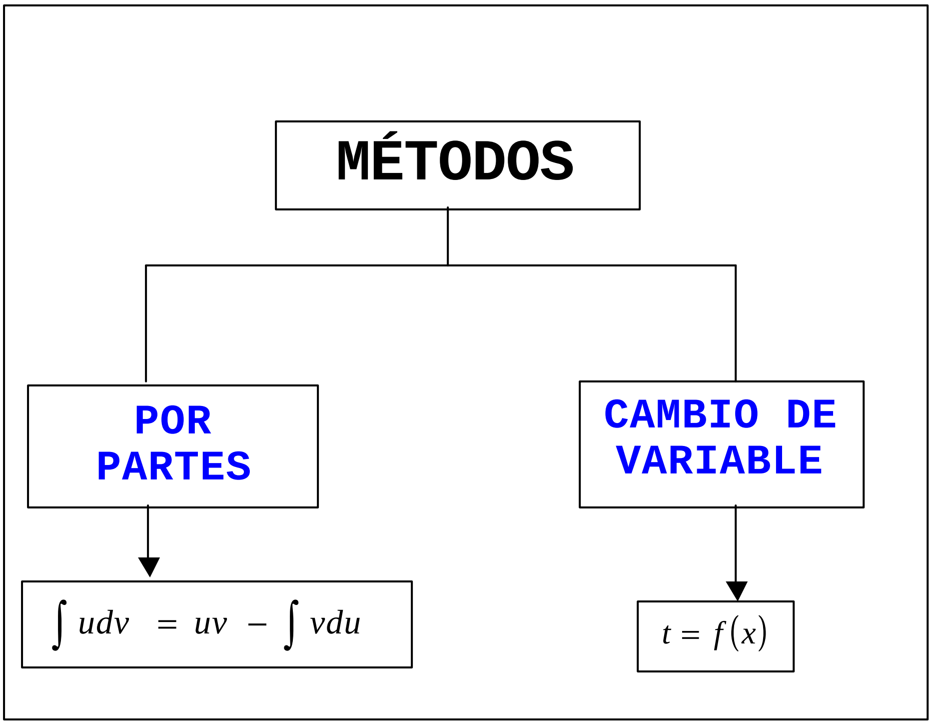
28) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(x^2\right) + C$

29) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+3}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) + C$

30) $\displaystyle\int x\,\operatorname{cotg}\left(x^2+1\right)dx = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left[\operatorname{sen}\left(x^2+1\right)\right] + C$

Capítulo 3
Procedimientos de integración

Volver
Índice



Volver
Índice

Capítulo 3
Procedimientos de integración

Volver
Métodos

3.1. Integración por cambio de variable

Sea $f(x)$ una función y $F(x)$ una de sus primitivas. Si $x = \varphi(u) \Rightarrow$ $F(x) = F(\varphi(u)) = G(u)$, y así, aplicando la regla de la cadena para calcular la derivada, obtenemos que $G'(u) = F'(\varphi(u))\,\varphi'(u) = f(\varphi(u))\,\varphi'(u)$.

Luego: $\int f(j(u))j'(u)\,du = G(u) + C = F(\varphi(u)) + C$. El camino a seguir sería: elegir un cambio de variable para realizar; resolver la nueva integral en la nueva variable; por último, deshacer el cambio para dar el resultado en función de la variable original.

$$\int f(x)\,dx = \begin{Bmatrix} x = j(u) \\ dx = j'(u)\,du \end{Bmatrix} = \int f(j(u))j'(u)\,du = F(\varphi(u)) + C = F(x) + C$$

Ejemplos

1) $$\int \sqrt{2x-1}\;dx = \begin{Bmatrix} 2x-1 = u \\ 2dx = du \end{Bmatrix} = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C =$$

$$= \frac{1}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C$$

2) $$\int x\sqrt{2x-1}\;dx = \begin{Bmatrix} 2x-1 = u \\ 2dx = du \end{Bmatrix} = \int \frac{u+1}{2}\sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int\left(u^{3/2} + u^{1/2}\right)du =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2}\right] + C = \frac{1}{10}u^{5/2} + \frac{1}{6}u^{3/2} + C =$$

$$= \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2} + \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + C$$

$$3)\ \int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\, dx = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sen} 3x = u \\ 3\cos 3x\, dx = du \end{array} \right\} = \frac{1}{3}\int u^2 du = \frac{1}{3}\frac{u^3}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{9}u^3 + C = \frac{1}{9}(\operatorname{sen} 3x)^3 + C$$

$$4)\ \int x^2 \operatorname{sen} x^3 dx = \left\{ \begin{array}{c} x^3 = u \\ 3x^2 dx = du \end{array} \right\} = \int \operatorname{sen} u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}(-\cos u) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right) + C$$

$$5)\ \int \frac{\sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x} = u \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx = du \end{array} \right\} = \int 2\sec^2 u\, du = 2\operatorname{tg} u + C = 2\operatorname{tg}\sqrt{x} + C$$

$$6)\ \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \operatorname{sen} u \\ dx = \cos u\, du \end{array} \right\} = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}\, \cos u\, du = \int \cos^2 u\, du =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2u}{2} du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\left(\operatorname{sen} 2u = 2\operatorname{sen} u \cos u = 2x\sqrt{1-x^2} \right)$$

Nota

Se verán más cambios de variable al resolver diferentes tipos de integrales de funciones particulares. Como es obvio, en una misma integral se pueden aplicar diversos cambios de variable de manera sucesiva, hasta que se llegue a una función de la que se conozca de forma inmediata una de sus primitivas. Todos los cambios de variable que se realicen en una misma integral deberán ser deshechos en orden contrario a como se han producido, es decir, primero el

último, después el anterior, y así hasta llegar al primero, que se deshará en último lugar.

Volver
Métodos

Volver
Índice

3.2. Integración por partes

Sea $u(x)v(x)$ el producto de dos funciones de x. Aplicando las reglas de diferenciación para el producto de funciones, obtenemos:

$$d(uv) = v\,du + u\,dv$$

o, equivalentemente,

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Integrando miembro a miembro esta igualdad, llegamos a:

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

pero, como la diferenciación y la integración son funciones inversas, se tiene que: $\int d(uv) = uv$, y, por tanto, la expresión anterior queda:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Esta igualdad entre integrales se conoce como el método de *integración por partes*. Así, si la integral que queremos calcular tiene la forma de un producto $\int u\,dv$, se puede intentar aplicar este método para obtener una parte conocida de la primitiva, uv, y una nueva integral a resolver, $\int v\,du$. Se espera que esta nueva integral sea más fácil de calcular que la primera. Si fuera más difícil, se prueba a intercambiar los papeles de u y dv (dv debe contener siempre a dx) y comenzar el cálculo. Si la nueva integral es aún más difícil, este método no es bueno y no se aplica. A veces este proceso hay que repetirlo más de una vez sobre una misma integral para llegar a conocer la primitiva buscada.

Existen casos en los cuales está comprobado que el método de integración por partes funciona bien, no queriendo decir con esto que sean los únicos casos en los cuales se puede aplicar, ni tampoco que no se pueda aplicar otro método de los que trataremos más adelante. Veamos estos casos a los que nos referimos.

3.2.1. Producto de un polinomio por una exponencial

Calcular: $I = \int x e^{2x}\, dx$

Probamos a tomar las partes como: $\left\{\begin{matrix} e^{2x} = u & \Rightarrow & 2e^{2x}dx = du \\ x\,dx = dv & \Rightarrow & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix}\right\}$

Así, la integral quedará: $I = uv - \int v\,du = e^{2x}\dfrac{x^2}{2} - \int \dfrac{x^2}{2} 2e^{2x} dx$

Volver
Índice

Esta integral es más complicada que la inicial, ya que hemos aumentado el grado del polinomio. Procedemos a cambiar los papeles de u y de dv, tomando el polinomio como la parte a derivar y la exponencial como la parte a integrar:

$$\left\{\begin{matrix} x = u & \Rightarrow & dx = du \\ e^{2x}dx = dv & \Rightarrow & v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{matrix}\right\}$$

Aplicando esta nueva elección en la integral original I:

$$I = \frac{1}{2}x\ e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$$

En este caso siempre es más conveniente elegir el polinomio para derivar, es decir, tomarlo como u (pues en la nueva integral quedará un polinomio de un grado menor) y la función exponencial para integrar, es decir, tomarla como dv (en la nueva integral quedará la misma exponencial salvo constantes).

3.2.2. Producto de un polinomio por un seno o un coseno

Calcular: $I = \int x \operatorname{sen} 2x\, dx$

Hacemos: $\left\{\begin{matrix} x = u & \Rightarrow & dx = du \\ \operatorname{sen} 2x\, dx = dv & \Rightarrow & v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{matrix}\right\}$

Así, $I = uv - \int v\, du = x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx =$

$$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

De nuevo es en general más conveniente derivar el polinomio, es decir, tomarlo como u, e integrar la función trigonométrica, como dv. Además, es bastante frecuente en estos casos tener que aplicar dos o más veces este proceso de integración por partes para resolver la integral original. Veámoslo con un ejemplo:

Calcular: $I = \int (2x^2 - 1)\cos 3x\, dx$

Hacemos partes: $\left\{\begin{array}{lcl} 2x^2 - 1 = u & \Rightarrow & 4x\, dx = du \\ \cos 3x\, dx = dv & \Rightarrow & v = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3} \end{array}\right\}$

Con lo que I queda:

$$I = (2x^2 - 1)\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \int \frac{1}{3} 4x \operatorname{sen} 3x\, dx =$$
$$= \frac{1}{3}(2x^2 - 1)\operatorname{sen} 3x - \frac{4}{3}\int x \operatorname{sen} 3x\, dx$$

En la nueva integral a la que hemos llegado el polinomio no ha desaparecido, pero se ha conseguido rebajar su grado en una unidad. Parece, pues, que una nueva aplicación del proceso de integración por partes a esta nueva integral, con la misma elección de u (el polinomio) y dv (la función trigonométrica), nos conducirá a una integral donde el polinomio haya desaparecido, siendo, por tanto, inmediato calcular una de sus primitivas. Nótese que, si en esta nueva integral intercambiamos los papeles de u (la función trigonométrica) y dv (el polinomio), llegaremos a la integral original, puesto que estaremos deshaciendo lo realizado en la primera aplicación del proceso de integración por partes. Así pues, consideramos la siguiente elección:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x = u & \Rightarrow & dx = du \\ \operatorname{sen}3x\,dx = dv & \Rightarrow & v = -\dfrac{\cos 3x}{3} \end{array}\right\}$$

Así, con la aplicación sucesiva del método de integración por partes a la integral original, ésta quedará de la forma:

$$I = \frac{1}{3}\left(2x^2 - 1\right)\operatorname{sen}3x - \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{3}x\cos 3x - \int -\frac{1}{3}\cos 3x\,dx\right] =$$
$$= \frac{1}{3}\left(2x^2 - 1\right)\operatorname{sen}3x + \frac{4}{9}x\cos 3x - \frac{4}{9}\int \cos 3x\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\left(2x^2 - 1\right)\operatorname{sen}3x + \frac{4}{9}x\cos 3x - \frac{4}{27}\operatorname{sen}3x + C$$

3.2.3. Producto de una exponencial por un seno o un coseno

Volver
Índice

Calcular: $I = \int e^{2x}\operatorname{sen}3x\,dx$

Hacemos partes: $\left\{\begin{array}{lcl} e^{2x} = u & \Rightarrow & 2e^{2x}dx = du \\ \operatorname{sen}3x\,dx = dv & \Rightarrow & v = -\dfrac{\cos 3x}{3} \end{array}\right\}$

Con esta elección, la integral I puede expresarse como:

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$$

Encontramos así una integral análoga a I. Integramos de nuevo por partes y continuamos llamando u a la exponencial y dv a la función trigonométrica (en caso contrario, volveríamos a la integral original). Así pues, la nueva elección de las partes será:

$$\left\{\begin{array}{lcl} e^{2x} = u & \Rightarrow & 2e^{2x}dx = du \\ \cos 3x\,dx = dv & \Rightarrow & v = \dfrac{\operatorname{sen}3x}{3} \end{array}\right\}$$

Por tanto, I quedará:

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{2x}\operatorname{sen}3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\operatorname{sen}3x\,dx\right]$$

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\operatorname{sen}3x - \frac{4}{9}I$$

$$\frac{13}{9}I = \frac{e^{2x}}{3}\left(\frac{2}{3}\operatorname{sen}3x - \cos 3x\right) + C$$

$$I = \frac{9}{13}\frac{e^{2x}}{3}\left(\frac{2}{3}\operatorname{sen}3x - \cos 3x\right) + C$$

Esta situación, en la cual aparece la integral I que se desea calcular en medio del proceso de integración, afectada de otro coeficiente, surge con frecuencia en el cálculo de integrales, siendo extremadamente ingeniosa su resolución tal como se ha procedido en el ejemplo.

Volver Índice

3.2.4. Producto de un logaritmo por otra función

Calcular: $I = \int \frac{\operatorname{Log} x}{x}dx$

En estos casos, la elección de las partes es bastante clara. Como el Logaritmo no posee una primitiva inmediata, lo más razonable es elegir la otra función como dv, y el propio Logaritmo como u, ya que su derivada si que es fácil de encontrar. Solo en los casos en que la otra función tenga una integración mucho más complicada que la de la función Logaritmo, se elegirán las partes de forma contraria. Esta situación es general, es decir, la elección de las partes tiene mucho que ver con que función sea más sencilla para calcular una de sus primitivas, puesto que el proceso de derivación ofrece menos dificultades.

En el ejemplo tomamos las partes como: $\left\{\begin{array}{lcl} \operatorname{Log} x = u & \Rightarrow & \frac{1}{x}dx = du \\ \frac{dx}{x} = dv & \Rightarrow & v = \operatorname{Log} x \end{array}\right\}$

$$I = \text{Log}x\ \text{Log}x - \int \text{Log}x \frac{dx}{x} = (\text{Log}x)^2 - I$$

$$2I = (\text{Log}x)^2 + C \Rightarrow I = \frac{1}{2}(\text{Log}x)^2 + C$$

3.2.5. Las tres funciones inversas arcsen$x$, arccos$x$, arctg$x$

Calcular: $I = \int \text{arcsen}x\, dx$

Por razones similares a las argumentadas para el caso anterior, la elección a priori más sencilla será tomar las partes como:

$$\left\{\begin{array}{lcc} \text{arcsen}x = u & \Rightarrow & \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \\ dx = dv & \Rightarrow & x = v \end{array}\right\}$$

Volver
Índice

$$I = x\ \text{arcsen}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\ \text{arcsen}x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x\ \text{arcsen}x + \frac{1}{2} 2\sqrt{1-x^2} + C$$

3.2.6. Algunas funciones racionales e irracionales

a) Calcular: $I = \int \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$

Hacemos partes: $\left\{\begin{array}{lcc} x = u & \Rightarrow & dx = du \\ \dfrac{x\, dx}{(1+x^2)^2} = dv & \Rightarrow & -\dfrac{1}{2(1+x^2)} = v \end{array}\right\}$

$$I = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\text{arctg}x + C$$

b) Calcular: $I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$

Tomamos partes: $\left\{ \begin{array}{lcc} \sqrt{x^2 - a^2} = u & \Rightarrow & \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = du \\ dx = dv & \Rightarrow & x = v \end{array} \right\}$

$$I = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx - a^2 \int \frac{dx/a}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - I - a^2\, \mathrm{Log} \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right| + C$$

$$I = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\, \mathrm{Log} \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right| + C$$

Ejercicios propuestos

1) $\int \text{arctg}x\, dx = x\text{arctg}x - \frac{1}{2}\text{Log}\left(1 + x^2\right) + C$

2) $\int \text{Log}(x+1)\, dx = x\, \text{Log}(x+1) - x + \text{Log}(x+1) + C$

3) $\int x\, \text{arctg}x\, dx = \frac{x^2}{2}\text{arctg}x - \frac{1}{2}(x - \text{arctg}x) + C$

4) $\int x\, \text{Log}(x+1)\, dx = \frac{x^2}{2}\text{Log}(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \text{Log}(x+1)\right) + C$

5) $\int x\, \text{sen}x\, dx = -x\cos x + \text{sen}x + C$

6) $\int x\, e^x dx = x\, e^x - e^x + C$

7) $\int \left(3x^2 + 2x - 7\right)\cos x dx = \left(3x^2 + 2x - 13\right)\text{sen}x + (6x+2)\cos x + C$

8) $\int \left(5x^2 - 3\right) 4^{3x+1} dx = 4^{3x+1}\left[\frac{5x^2 - 3}{3\text{Log}4} - \frac{10x}{(3\text{Log}4)^2} + \frac{10}{(3\text{Log}4)^3}\right] + C$

9) $\int \frac{x}{\text{sen}^2 x} dx = -x\,\text{cotg}x + \text{Log}(\text{sen}x) + C$

10) $\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x\left(\text{sen}x + \cos x\right) + C$

11) $\int \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{x}\right)dx = x\operatorname{arccos}\left(\frac{1}{x}\right) - \operatorname{Log}\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C$

12) $\int x^4(\operatorname{Log}x)^2\,dx = \frac{x^5}{5}(\operatorname{Log}x)^2 - \frac{2}{25}x^5\operatorname{Log}x + \frac{2}{25}\frac{x^5}{5} + C$

13) $\int \frac{\operatorname{Log}x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\,\operatorname{Log}x - 4\sqrt{x} + C$

14) $\int x^3 \operatorname{arcsen}x\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{32}\right)\operatorname{arcsen}x + \frac{1}{32}\left(2x^2 + 3\right)x\sqrt{1 - x^2} + C$

15) $\int \operatorname{Log}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)dx = x\operatorname{Log}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \sqrt{1 + x^2} + C$

16) $\int x\cos^2 2x\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{8}\operatorname{sen}4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C$

17) $\int x^2\operatorname{sen}(\operatorname{Log}x)\,dx = \frac{x^3}{10}\left(3\operatorname{sen}(\operatorname{Log}x) - \cos(\operatorname{Log}x)\right) + C$

18) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$

19) $\int \operatorname{sen}x\,\operatorname{Log}(1 + \operatorname{sen}x)\,dx = -\cos x\,\operatorname{Log}(1 + \operatorname{sen}x) + x + \cos x + C$

20) $\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2}e^x\,dx = e^x - 2\left(e^x - \frac{x\,e^x}{x + 1}\right) + C$

21) $\int e^{2x}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{2x}}{8}\left(2 + \operatorname{sen}2x + \cos 2x\right) + C$

22) $\int \frac{\text{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\sqrt{1-x}\;\text{arcsen}\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$

23) $\int \frac{\text{sen}^2 x}{e^x}\,dx = \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{\cos 2x - 2\text{sen}\,2x}{5} - 1\right) + C$

24) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\,\text{tg}x + \text{Log}\left|\cos x\right| + C$

25) $\int x\,\text{sen}x\cos x\,dx = -\frac{1}{4}\,x\cos 2x + \frac{1}{8}\text{sen}2x + C$

26) $\int (\text{arcsen}x)^2\,dx = x\,(\text{arcsen}x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\;\text{arcsen}x - 2x + C$

27) $\int x\,\text{tg}^2 x\,dx = x\,\text{tg}x + \text{Log}\left|\cos x\right| - \frac{x^2}{2} + C$

28) $\int \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}\,dx = \frac{e^x}{1+x} + C$

29) $\int x^2\text{Log}x\,dx = \frac{1}{3}\,x^3\text{Log}x - \frac{1}{9}\,x^3 + C$

30) $\int \cos x\,\text{Log}\left|\text{sen}x\right|\,dx = \text{sen}x\,\text{Log}\left|\text{sen}x\right| - \text{sen}x + C$

31) $\int e^{2x}\text{sen}x\cos x\,dx = \frac{e^{2x}}{8}(\text{sen}2x - \cos 2x) + C$

32) $\int \frac{\cos 2x}{e^x}\,dx = \frac{e^{-x}}{5}(2\text{sen}2x - \cos 2x) + C$

33) $\int \frac{x\, e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{2}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)+C$

34) $\int \frac{a-2x}{\sqrt{ax-x^2}}\ \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) dx =$

$$= 2\sqrt{ax-x^2}\ \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)+\sqrt{2}\, a\ \operatorname{Log}|a+x|+C$$

35) $\int \frac{\operatorname{Log} x}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}(1+\operatorname{Log} x)+C$

36) $\int \frac{\operatorname{Log}^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\left(2+2\operatorname{Log} x+\operatorname{Log}^2 x\right)+C$

37) $\int 3^{\sqrt{2x+1}}\ dx = \frac{3^{\sqrt{2x+1}}\sqrt{2x+1}}{\operatorname{Log} 3}-\frac{3^{\sqrt{2x+1}}}{\operatorname{Log}^2 3}+C$

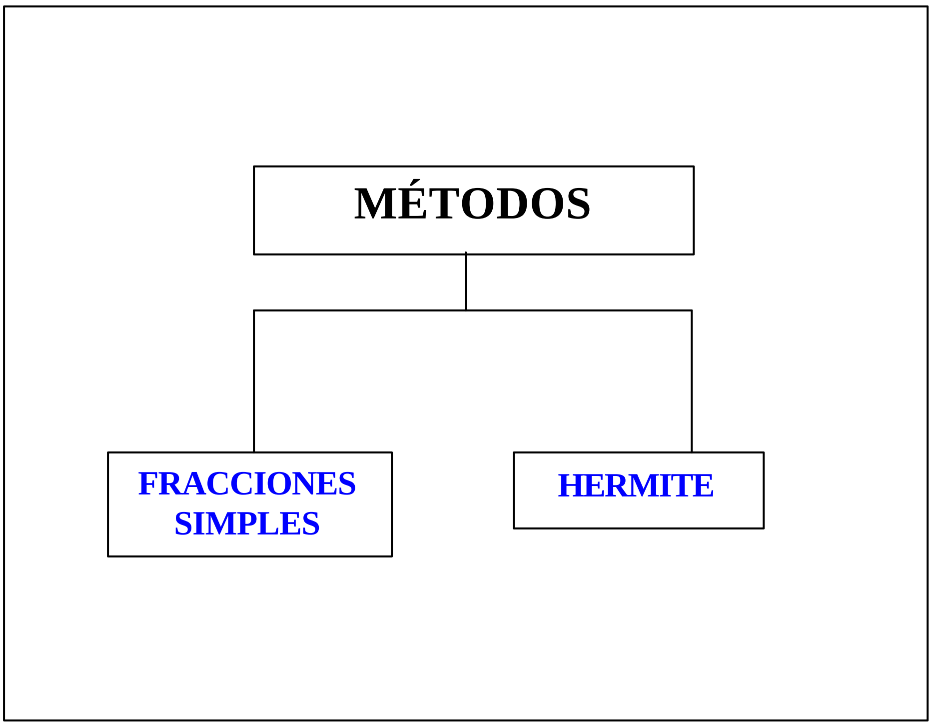
38) $\int \left(2x^2-1\right)\cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\left(2x^2-1\right)\operatorname{sen} 3x+\frac{4}{9}\, x\cos 3x-\frac{4}{27}\operatorname{sen} 3x+C$

39) $\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\, dx = -\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x+\frac{6}{13}\frac{e^{2x}\operatorname{sen} 3x}{3}+C$

40) $\int \operatorname{Log}\left(a^2+x^2\right)dx = x\operatorname{Log}\left(a^2+x^2\right)-2x+2a\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

Capítulo 4
Integración de funciones racionales

Volver
Índice



Capítulo 4
Integración de funciones racionales

4.1. Introducción

Una función racional es el cociente de dos polinomios $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$. Supondremos que los dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$ no tienen ningún cero en común, es decir, que no existe ningún número, real o complejo, x_0, tal que los anule a la vez $A(x_0) = B(x_0) =$ 0. En este caso se dice que la función es *irreducible*. Para calcular $\int f(x)\,dx$ seguiremos los siguientes pasos.

4.2. Raíces comunes

Volver Índice

En este caso, se tiene una factorización de los dos polinomios de la forma: $A(x) = (x - x_0)A_1(x)$, $B(x) = (x - x_0)B_1(x)$, y así análogamente con todas y cada una de las raíces comunes a los dos. En estas condiciones, para $x \neq x_0$, la función racional $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ se reduce a la función simplificada $\dfrac{A_1(x)}{B_1(x)}$, ahora ya sin raíces comunes (irreducible). Así pues, estudiaremos las integrales del tipo $\int \dfrac{A(x)}{B(x)}\,dx$, donde $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ es una función irreducible.

4.3. División entera de polinomios

Se realizará en el caso de que el grado del numerador $A(x)$ sea superior o igual al grado del denominador $B(x)$. En tal caso, existen polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$A(x) = B(x)\,Q(x) + R(x)\,, \quad \text{con} \quad grado\ R(x) < grado\ B(x)$$

Así, se puede expresar la función racional $f(x)$ como:

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

Al polinomio $Q(x)$ se le llama *parte entera de la función racional* y su integración es sencilla. Así, la integral de $f(x)$ queda de la forma:

$$\int f(x)\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{B(x)}\,dx$$

Así, tendríamos que integrar una función racional irreducible en la que el grado del numerador es estrictamente inferior al del denominador. Para encontrar estos polinomios $Q(x)$, $R(x)$ es suficiente con realizar la división entera de polinomios en la forma tradicional. Por tanto, a partir de ahora consideraremos funciones racionales irreducibles en las que el grado del numerador sea estrictamente menor que el grado del denominador.

Volver
Índice

4.4. Descomposición de un polinomio en producto de factores

El objetivo ahora será encontrar una descomposición de la función racional de la forma anterior a integrar, en suma de otras funciones racionales que sean más simples y fáciles de integrar. Para deducir dicha descomposición, el primer paso necesario requiere factorizar el denominador, o sea, calcular las raíces del mismo. Es decir, basta encontrar las raíces de $B(x)$, resolviendo para ello la ecuación polinómica $B(x) = 0$. Estas raíces serán, en general, números complejos, y dependiendo de la naturaleza y multiplicidad de las mismas se elegirá una descomposición u otra de la función racional. Para localizar las raíces de $B(x) = 0$ se utilizarán los métodos conocidos (fórmula para polinomios de segundo grado, Ruffini para grado superior, o cualquier otro método válido para su resolución).

Según sean estas raíces, como ha quedado dicho anteriormente, utilizaremos dos métodos para resolver este tipo de integrales: descomposición en fracciones simples o método de Hermite.

Antes de integrar una función racional irreducible, se intenta descomponerla en una suma de funciones fáciles de integrar. Para ello previamente hemos calculado todas las raíces de $B(x)$ (reales y complejas). Sean éstas $a_1, a_2, \ldots, a_r$ reales con orden de multiplicidad $m_1, m_2, \ldots, m_r$, respectivamente. Si tenemos una raíz compleja, también debe aparecer

necesariamente su conjugada; así pues, sean $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_s \pm i\beta_s$ las parejas de raíces complejas conjugadas con orden de multiplicidad $n_1, \ldots, n_s$, respectivamente. Así, $B(x)$ puede descomponerse (se demuestra en álgebra) en producto de factores como:

$$B(x) = \lambda\left[(x-a_1)^{m_1} \ldots (x-a_r)^{m_r}\left((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right)^{n_1} \ldots \left((x-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right)^{n_s}\right]$$

(obsérvese que $[x-(\alpha_k+i\beta_k)][x-(\alpha_k-i\beta_k)] = (x-\alpha_k)^2+\beta_k^2$), donde λ es el coeficiente del término de mayor grado de $B(x)$ (coeficiente director de $B(x)$). De esta manera, de la descomposición en factores de $B(x)$ se obtiene la descomposición en fracciones simples de $\frac{R(x)}{B(x)}$:

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-a_r} + \ldots + \right.$$

$$+ \frac{B_{m_r}}{(x-a_r)^{m_r}} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \ldots + \frac{M_{n_1}x+N_{n_1}}{\left[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right]^{n_1}} + \ldots +$$

$$\left. + \frac{P_1x+T_1}{(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2} + \ldots + \frac{P_{n_s}x+T_{n_s}}{\left[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right]^{n_s}}\right]$$

donde $A_k, B_k, M_k, N_k, P_k, T_k$ son constantes reales a determinar.

4.5. Método de fracciones simples

Volver Métodos

Este método se aplicará cuando las únicas raíces con multiplicidad mayor estricta a uno de $B(x)$ sean reales. La descomposición en suma de funciones racionales sencillas a integrar de la función racional irreducible original se realizará según el siguiente criterio:

Volver Índice

– Por cada raíz real simple $x = a$ aparecerá un sumando de la forma:

$$\frac{A}{x-a}$$

– Por cada raíz real $x = b$ con multiplicidad m mayor estricta a uno aparecerán m sumandos de la forma:

$$\frac{B_1}{x-b} + ... + \frac{B_{m-1}}{(x-b)^{m-1}} + \frac{B_m}{(x-b)^m}$$

– Cada raíz compleja $\alpha + i\beta$ simple se une a su conjugada $\alpha - i\beta$, adoptando la forma $(x-\alpha)^2 + \beta^2$. Por cada una de estas parejas aparecerá un sumando en la descomposición de la forma:

$$\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

Seguidamente se procede al cálculo de todas las constantes reales indeterminadas que aparecen en los numerados de todos los sumandos en la descomposición, A,B,...

Así pues, la pregunta ahora sería: ¿cómo determinar las constantes de los numeradores de cada una de las fracciones simples? El primer paso para responder a esta pregunta consiste en realizar operaciones con todos los sumandos, con el objeto de reducirlos a común denominador, que en general coincidirá con $B(x)$, para pasar a considerar una igualdad entre los numeradores polinómicos $R(x)$ y el resultante en el miembro de la derecha de la descomposición, fruto de la operación de colocar el denominador común. Una vez obtenida esta igualdad entre polinomios, se puede optar por al menos dos caminos:

– el primero, más general, consiste en identificar los coeficientes de los términos de igual grado en ambos miembros de la igualdad;
– el segundo se realizará dando valores sencillos a la variable x para ambos miembros de la igualdad (en especial, valores que correspondan a las raíces reales de $B(x)$).

En definitiva, el método de obtención de las constantes puede variar, pero todo se reduce a una igualdad entre polinomios. Por ello, cabe decir que esta descomposición es única, puesto que dos polinomios son iguales si y sólo si todos sus coeficientes coinciden. En ambos casos, se llegará a un sistema lineal cuadrado, cuyas incógnitas serán las constantes a determinar, con solución única garantizada.

Una vez efectuada esta descomposición y conocidas todas las constantes que aparecen en ella, las integrales que deberemos resolver adoptarán alguna de las siguientes expresiones:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A \operatorname{Log}|\, x-a\,| + C$

2) $\int \frac{B}{(x-b)^p}dx = B\frac{(x-b)^{-p+1}}{-p+1} + C = \frac{B}{-p+1}\frac{1}{(x-b)^{p-1}} + C$

(si p es natural y $p \geq 2$)

3) $\int \frac{Mx+N}{(x-r)^2+s^2}dx = \int \frac{Mx+N-Mr+Mr}{(x-r)^2+s^2}dx = M\int \frac{x-r}{(x-r)^2+s^2}dx +$

$$+\int \frac{N+Mr}{(x-r)^2+s^2}dx = \frac{M}{2}\operatorname{Log}\left[(x-r)^2+s^2\right] + \int \frac{Mr+N}{s^2\left[\left(\frac{x-r}{s}\right)^2+1\right]}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\operatorname{Log}\left[(x-r)^2+s^2\right] + \frac{N+Mr}{s}\int \frac{\frac{dx}{s}}{\left(\frac{x-r}{s}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{M}{2}\operatorname{Log}\left[(x-r)^2+s^2\right] + \frac{N+Mr}{s}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-r}{s}\right) + C$$

Ejemplos

1) Calcular: $I = \int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{(x+2)(x-2)}$

Como la función racional a integrar es irreducible y el grado del numerador, 0, es estrictamente menor que el del denominador, 2, procedemos a calcular las raíces de éste último. Obviamente, éstas son

$x = 2$, $x = -2$. Como ambas son reales, el método de descomposición a utilizar será el de fracciones simples. Por tanto, descomponemos la función racional de la siguiente manera:

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

Igualando los numeradores de ambos miembros, una vez puesto el denominador común, llegamos a que:

$$1 = A(x-2) + B(x+2)$$

Para calcular A y B, usamos el segundo procedimiento comentado, es decir, damos a x los valores de las raíces reales del denominador de la función racional original. Así pues,

$$\text{si } x = 2 \Rightarrow B = \frac{1}{4}, \quad \text{y si } x = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, la integral original quedará, aplicando las propiedades de la integración:

$$I = \int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{-1/4}{x+2}dx + \int \frac{1/4}{x-2}dx = -\frac{1}{4}\operatorname{Log}|x+2| + \frac{1}{4}\operatorname{Log}|x-2| + C$$

2) Calcular: $I = \displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx = \int \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}dx$

De nuevo, la función racional a integrar es irreducible y el grado del numerador, 1, es estrictamente menor que el del denominador, 3. Las raíces de éste son $x = -1$, real y simple, $x = 1$, real y doble. Como no posee raíces complejas, usaremos la descomposición dada por el método de fracciones simples:

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

Igualando los numeradores, tenemos que:

$$3x + 5 = A\,x^2 - 2Ax + A + B\,x^2 - B + Cx + C$$

Usaremos ahora el primer procedimiento sugerido para calcular las constantes indeterminadas, es decir, igualaremos los coeficientes del mismo grado a ambos lados de la igualdad:

grado 2:	$0 = A + B$
grado 1:	$3 = -2A + C$
grado 0:	$5 = A - B + C$

Este sistema contiene tres ecuaciones y tres incógnitas. Su resolución es sencilla, obteniéndose el siguiente resultado:

$$A = \frac{1}{2}\ ,\ B = -\frac{1}{2}\ ,\ C = 4$$

Por tanto, la integral original quedará como:

$$I = \int \frac{1/2}{x+1}dx + \int \frac{-1/2}{x-1}dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Log}|x+1| - \frac{1}{2}\mathrm{Log}|x-1| - \frac{4}{x-1} + C$$

3) Calcular: $I = \int \frac{6x^2 - 38x + 76}{(x+1)(x-5)(x-3)}dx$

La función racional es irreducible (se puede comprobar fácilmente que ni $x = -1$, ni $x = 5$, ni $x = 3$, raíces del denominador, lo son del polinomio que aparece en el numerador), y además el grado del numerador, 2, es

estrictamente menor que el del denominador, 3. Por tanto, la descomposición a través del método de fracciones simples queda:

$$\frac{6x^2-38x+76}{(x+1)(x-5)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{x-3}=$$

$$=\frac{A(x-5)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-5)(x-3)}$$

Como las raíces del denominador son reales simples, daremos justamente esos valores a la variable x en la igualdad de numeradores en la descomposición:

$x = -1 \Rightarrow 120 = 24A \Rightarrow A=5$
$x = 3 \Rightarrow 54 - 114 + 76 = -8C \Rightarrow 16 = -8C \Rightarrow C=-2$
$x = 5 \Rightarrow 150 - 190 + 76 = 12B \Rightarrow 36 = 12B \Rightarrow B=3$

Así, la integral I se calcula como:

$$I = 5\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{x-5}-2\int\frac{dx}{x-3} = \text{Log}\,\frac{|x+1|^5|x-5|^3}{|x-3|^2}+C$$

4) Calcular: $I = \displaystyle\int\frac{2x^3-7x^2+9x-5}{x^4-x^3}dx$

Las raíces del denominador son $x = 0$, de multiplicidad igual a tres, y $x = 1$, simple. Como estos valores no anulan al numerador, la función racional es irreducible. Además, el grado del numerador, 3, es estrictamente menor que el del denominador, 4. Esto nos lleva a realizar la descomposición por medio del método de fracciones simples:

$$\frac{2x^3-7x^2+9x-5}{x^4-x^3}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-1}=$$

$$=\frac{A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2(x-1)+Dx^3}{x^3(x-1)}$$

Aplicando la segunda opción dada para calcular los coeficientes constantes, daremos a x los valores de sus dos raíces reales distintas y otros dos valores arbitrarios hasta conseguir un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$x=0 \;\Rightarrow\; -5=-A \;\Rightarrow\; A=5$

$x=1 \;\Rightarrow\; -1=D$

$x=-1 \;\Rightarrow\; -23=-2A+2B-2C-D$

$\Rightarrow\; -23=-10+2B-2C+1 \;\Rightarrow\; -14=2B-2C$

$x=2 \;\Rightarrow\; 1=A+2B+4C+8D \;\Rightarrow\; 1=5+2B+4C-8$

$\Rightarrow\; 4=2B+4C$

De las dos últimas ecuaciones resulta que: $C=3 \Rightarrow B=-4$.
Así, I quedará:

$$I=5\int\frac{dx}{x^3}-4\int\frac{dx}{x^2}+3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{5}{2x^2}+\frac{4}{x}+3\text{Log}|x|-\text{Log}|x-1|+C$$

5) Calcular: $I=\int\frac{x-4}{x^3-x^2-x-2}dx=\int\frac{x-4}{(x-2)(x^2+x+1)}dx$

El denominador posee una raíz real, $x=2$, simple, y una pareja de raíces complejas conjugadas, que son los ceros del polinomio x^2+x+1. Estas raíces no lo son del numerador, por lo que la función racional es irreducible. De nuevo, el grado del numerador, 1, es estrictamente menor que el del denominador, 3. Aunque en este caso aparecen raíces complejas, éstas son simples, por lo que de nuevo debemos emplear el método de descomposición de fracciones simples:

$$\frac{x-4}{(x-2)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+x+1)}$$

En este caso, optamos por la primera opción para el cálculo de las constantes indeterminadas, igualando los coeficientes de los términos del mismo grado en ambos miembros:

$$x - 4 = A x^2 + A x + A + B x^2 - 2Bx + C x - 2C$$

$$\begin{array}{lll} x^2: & 0 = A+B & \Rightarrow \quad B = -A \\ x\ : & 1 = A - 2B + C \Rightarrow & A = \dfrac{-2}{3}, \quad B = \dfrac{2}{7}, \quad C = \dfrac{13}{7} \\ 1\ : & -4 = A - 2C & \end{array}$$

Por tanto, la integral I quedará:

$$I = \frac{-2}{7}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{7}\int \frac{2x+13}{x^2+x+1}dx = \frac{-2}{7}\text{Log}\,|\,x-2\,| + \frac{1}{7}\int \frac{2x+13}{x^2+x+1}dx$$

Esta nueva integral la separaremos en dos, con el objetivo de llegar en una de ellas a obtener un Logaritmo, y en la otra un arco tangente.

$$I_1 = \int \frac{2x+13}{x^2+x+1}dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + 12\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \text{Log}\,|\,x^2 + x + 1\,| + 12\,\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \text{Log}\,|\,x^2 + x + 1\,| + 16\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2/\sqrt{3}\;dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \text{Log}|\,x^2 + x + 1| + 8\sqrt{3}\,\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Llevando este resultado a la integral original, tenemos que:

$$I = \frac{-2}{7}\text{Log}\,|\,x-2\,| + \frac{1}{7}\text{Log}|\ x^2 + x + 1\,|\ + \frac{8}{7}\sqrt{3}\ \text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Volver Métodos

Volver Índice

4.6. Método de Hermite

Este método se aplicará para calcular integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, cuando *grado* $P(x)$ < *grado* $Q(x)$, y $Q(x)$ tiene raíces complejas con multiplicidad mayor estricta a uno. Dicho método se basa en que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer como sigue:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{R(x)}{D(x)}\right] + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{Mx+N}{(x-r)^2+s^2}$$

Donde, si $Q(x) = (x-a)^m \ldots (x-b)^n \ldots \left[(x-r)^2+s^2\right]^p$, entonces,

$$D(x) = (x-a)^{m-1} \ldots (x-b)^{n-1} \ldots \left[(x-r)^2+s^2\right]^{p-1}$$

es decir, $D(x)=m.c.d.[Q(x),Q'(x)]$, o, lo que es lo mismo, el polinomio que resulta de dividir $Q(x)$ por $(x-a)\ldots\ (x-b)\ldots\ \left[(x-r)^2+s^2\right]$.

En resumen, $D(x)$ es el polinomio $Q(x)$ ya descompuesto en factores y con cada uno de ellos rebajado en uno su orden de multiplicidad.

Por otra parte, $R(x)$ es un polinomio de coeficientes a determinar y de grado inferior en una unidad al de $D(x)$.

Así, si llamamos $C(x)$ al polinomio $(x-a)\ldots(x-b)\ldots\left[(x-r)^2+s^2\right]$, es decir, $C(x) = \dfrac{Q(x)}{D(x)}$, podemos escribir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{R(x)}{D(x)}\right] + \frac{B(x)}{C(x)}$$

Integrando miembro a miembro esta igualdad,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{R(x)}{D(x)} + \int \frac{B(x)}{C(x)}\,dx$$

donde *grado* $B(x)$ = [*grado* $C(x)$] –1

Nótese que este método de Hermite ya nos proporciona una parte del resultado buscado, y que la integral que nos queda por calcular es una función racional con numerador $B(x)$ y denominador $C(x)$, que se puede descomponer por medio del método anterior de fracciones simples, ya que las raíces complejas de $C(x)$, en caso de existir, deben ser simples. Por tanto, podemos escribir:

$$\frac{B(x)}{C(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{Mx+N}{(x-r)^2+s^2}$$

Aunque el método de Hermite es largo, no sólo porque debemos obtener los coeficientes indeterminados sino porque hay que realizar $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{R(x)}{D(x)}\right]$, que, aunque sencilla es muy engorrosa de calcular, el método es aplicable a cualquier función racional, ya que es una generalización del método de fracciones simples teniendo en cuenta que añadimos el término $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{R(x)}{D(x)}\right]$.

Nota

Omitimos la demostración de este método por ser muy compleja.

Ejemplos

1) Calcular: $I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 (x^2+1)^2}$

En este caso, el denominador posee raíces complejas dobles, por lo que, como el grado del numerador, 0, es estrictamente menor que el denominador, 6, debemos aplicar la descomposición dada por el método de Hermite:

$$\frac{1}{(x+1)^2 (x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x^2+1)}\right] + \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Una vez realizada la derivada del cociente y puesto denominador común (como en el caso de fracciones simples), usaremos el procedimiento de igualar los coeficientes de los términos del mismo grado en ambos lados de la igualdad, para obtener el sistema que nos determine el valor de las constantes indeterminadas:

$$\begin{array}{ll}
x^5: & 0 = A + B \\
x^4: & 0 = -a + A + 2B + C \\
x^3: & 0 = -2b + 2A + 2B + 2C \\
x^2: & 0 = -3c - b + a + 2A + 2B + 2C \\
x: & 0 = 2a - 2c + A + B + 2C \\
1: & 1 = b - c + A + C
\end{array}$$

Resolviendo este sistema, llegamos a que:

$$a = \frac{-1}{4},\ b = \frac{1}{5},\ c = 0,\ A = \frac{1}{2},\ B = \frac{-1}{2},\ C = \frac{1}{4}$$

Por tanto, la integral original tendrá la forma:

$$I = \frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{-2x+1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{2}\mathrm{Log}|\,x+1| - \frac{1}{4}\mathrm{Log}|\,x^2+1| + \frac{1}{4}\mathrm{arctg}x + C$$

2) Calcular: $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x-1)(x^2+1)^2}$

De nuevo, el denominador posee una pareja de raíces complejas conjugadas de multiplicidad dos, y el grado del numerador, 0, es estrictamente menor que el del denominador, 8, por lo que, aplicando el método de Hermite, obtenemos:

$$\frac{1}{x^3(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)}\right] + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} +$$
$$+ \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

Nótese que la raíz real $x = 1$ no aparece en el denominador del cociente a derivar, debido a que su multiplicidad es uno, y al rebajarla en un grado se convierte en cero. Realizada la derivación y la puesta de denominador común, una vez más igualamos los coeficientes de los términos del mismo grado, obteniendo el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{ll}
x^7: & 0 = A + B + M = 0 \\
x^6: & 0 = -a - A - M + N \\
x^5: & 0 = a - 2b + 2A + 2B + M - N \\
x^4: & 0 = 2b + a - 3c - 2A - M + N \\
x^3: & 0 = 3c - a - 4d + A + B - N \\
x^2: & 0 = 4d - c - A \\
x: & 0 = c - 2d \\
1: & 1 = 2d
\end{array}$$

La solución única de este sistema es:

$$a = \frac{5}{4},\, b = \frac{3}{4},\, c = 1,\, d = \frac{1}{2},\, A = 1,\, B = \frac{1}{4},\, M = \frac{-5}{4},\, N = 1$$

Por tanto, I queda:

$$I = \frac{5x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{4x^2\left(x^2+1\right)} + \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{8}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{5x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{4x^2\left(x^2+1\right)} + \text{Log}|x| + \frac{1}{4}\text{Log}|x-1| - \frac{5}{8}\text{Log}|x^2+1| + \text{arctg}\, x + C$$

3) Calcular: $I = \displaystyle\int \frac{7x^4 - 10x^3 - 11x^2 - 24x + 8}{(x-5)\left(x^2+2x+2\right)^2}dx$

El denominador factorizado nos muestra la existencia de raíces complejas conjugadas dobles. Como, además, la función racional es irreducible y el grado del numerador, 4, es estrictamente menor que el del denominador, 5, procedemos a aplicar el método de descomposición de Hermite:

$$\frac{7x^4 - 10x^3 - 11x^2 - 24x + 8}{(x-5)\left(x^2+2x+2\right)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{ax+b}{x^2+2x+2}\right] + \frac{A}{x-5} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2}$$

Procediendo como en los ejemplos anteriores, se llega al siguiente sistema lineal que determina las constantes:

x^4:	$7 = A + M$
x^3:	$-10 = -a + 4A - 3M + N$
x^2:	$-11 = 5a - 2b + 8A - 8M - 3N$
x:	$-24 = 8b + 2a + 8A - 10M - 8N$
1:	$8 = -10a + 10b + 4A - 10N$

cuya solución es:

$$a = 1, b = -1, A = 2, M = 5, N = -2$$

Así, resulta que:

$$I = \frac{x-1}{x^2+2x+2} + 2\int \frac{dx}{x-5} + \int \frac{5x-2}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \frac{x-1}{x^2+2x+2} + 2\text{Log}|x-5| + \frac{5}{2}\text{Log}|x^2+2x+2| - 7\,\text{arctg}(x+1) + C$$

donde la última integral es de uno de los tipos que hemos visto en el caso de aplicación del método de fracciones simples, cuando las raíces del denominador eran complejas conjugadas simples.

4.7. Problemas resueltos

Volver
Índice

1) $I = \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}dx$

Debido a la existencia de raíces complejas conjugadas en el denominador, se asegura que el método de descomposición de Hermite va a permitir resolver esta integral. En este caso, vamos a aplicar una generalización del método de fracciones simples, que aquí va a funcionar, aunque, en general, acabaríamos por recurrir al método de Hermite necesariamente.
Vamos, por tanto, a aplicar la descomposición de fracciones simples, tratando a las raíces complejas conjugadas con multiplicidad mayor estricta a uno como lo hacemos con las que son reales. En este ejemplo aparecerán tres sumandos debidos a la única pareja de raíces complejas conjugadas triples:

$$\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$$

Si ponemos denominador común e igualamos los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al sistema lineal:

$$\begin{array}{ll} x^5: & 1 = A \\ x^4: & -1 = B \\ x^3: & 4 = 4A + C \\ x^2: & -4 = 4B + D \\ x: & 8 = 4A + 2C + E \\ 1: & -4 = 4B + 2D + F \end{array}$$

Su solución es:

$$A = 1, B = -1, C = 0, D = 0, E = 4, F = 0$$

Por tanto, la integral quedará:

$$I = \int \frac{x-1}{x^2+2}dx + \int \frac{4x}{\left(x^2+2\right)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\text{Log}|x^2 + 2| - \frac{\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\left(x^2+2\right)^2} + \text{C}$$

2) $I = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

Aquí sí que aplicamos el método de Hermite, debido a la existencia de raíces complejas conjugadas dobles.

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{ax+b}{x^2+1}\right] + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

El sistema lineal al que llegamos es:

$$\begin{array}{ll} x^3: & 0 = M \\ x^2: & 0 = -a + N \\ x: & 0 = -2b + M \\ 1: & 1 = a + N \end{array}$$

cuya solución es:

$$a=\frac{1}{2}\,,b=0\,,M=0\,,N=\frac{1}{2}$$

que, llevada a la integral, resulta en:

$$I=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}x+C$$

3) Proponemos un último ejemplo: $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$

Como en casos anteriores, al aplicar Hermite resulta:

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{d}{dx}\left[\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{\left(x^2+1\right)^2}\right]+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

El sistema queda:

$$\begin{array}{ll}
x^5: & 0=M\\
x^4: & 0=-a+N\\
x^3: & 0=-2b+2M\\
x^2: & 0=-3c+3a+2N\\
x: & 0=2b-4d+M\\
1: & 1=c+N
\end{array}$$

Su solución es:

$$a=\frac{3}{8}\,,b=0\,,c=\frac{5}{8}\,,d=0\,,M=0\,,N=\frac{3}{8}$$

La integral se resuelve finalmente como:

$$I = \frac{3x^3 + 5x}{8\left(x^2 + 1\right)^2} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{3x^3 + 5x}{8\left(x^2 + 1\right)^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C$$

Ejercicios propuestos

Volver
Índice

1) $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}dx = \frac{x^2}{2} + 2\text{Log}x - \frac{1}{x} - 2\text{Log}(x-1) + C$

2) $\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8}dx = x + 4\text{Log}(x-4) + \text{Log}(x+2) + C$

3) $\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1}dx = \frac{1}{2}\text{Log}(x+1) - \frac{1}{2}\text{Log}(x-1) - \frac{4}{x-1} + C$

4) $\int \frac{8x^2 + 6x + 6}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}dx =$

$$= 5\text{Log}(x-1) + \frac{3}{2}\text{Log}\left[(x-1)^2 + 4\right] + 11\text{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

5) $\int \frac{3x-2}{x^2 + x + 1}dx = \frac{3}{2}\text{Log}\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] - \frac{7}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

6) $\int \frac{x^2 - 2}{x^3(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\frac{5x^2 + 2}{x^2(x^2+1)} + 5\text{Log}x - \frac{5}{2}\text{Log}(x^2+1) + C$

7) $\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx = \frac{1}{3}\frac{3x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{9}\text{Log}(x-1) +$

$$+ \frac{1}{18}\text{Log}(x^2 + x + 1) + \frac{7\sqrt{3}}{9}\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

8) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{12}\frac{x-2}{x^2+2} + \frac{2}{9}\operatorname{Log}(x-1) - \frac{1}{9}\operatorname{Log}(x^2+2) -$

$$-\frac{5\sqrt{2}}{72}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\operatorname{Log}(x-3) - \frac{1}{6}\operatorname{Log}(x+3) + C$

10) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x-4}\,dx = \frac{1}{5}\operatorname{Log}(x+1) + \frac{4}{5}\operatorname{Log}(x-4) + C$

11) $\displaystyle\int \frac{x^4}{(1-x)^3}\,dx = -\frac{x^2}{2} - 3x - 6\operatorname{Log}(1-x) - \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} + C$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{4}\operatorname{Log}(x-1) - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\operatorname{Log}(x+1) - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + C$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x+1) - \frac{1}{4}\operatorname{Log}(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

14) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{Log}(x^4+x^2+1) - \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{(9+x^2)^2} = \frac{1}{54}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{18(9+x^2)} + C$

16) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+4}{(4+x^2)^2}\,dx = \frac{4}{x^2+4} + \operatorname{Log}(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

17) $\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\mathrm{Log}(x-1) - \frac{1}{6}\mathrm{Log}(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

18) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left|\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

19) $\int \frac{3x^2-8x+1}{(x-2)(x-3)(x+1)}\,dx = \mathrm{Log}|x-2| + \mathrm{Log}|x-3| + \mathrm{Log}|x+1| + C$

20) $\int \frac{3x+1}{(x^2-1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\mathrm{Log}|x+1| + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\mathrm{Log}|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$

21) $\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}\,dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Log}|x-3| - \frac{13}{x-3} + \frac{3}{2}\mathrm{Log}|x-1| + C$

22) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx = x + \mathrm{Log}|x^2-x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

23) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-1)} = -\frac{1}{4}\mathrm{Log}|x+1| + \frac{1}{4}\mathrm{Log}|x-1| - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + C$

24) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx = x - 3\mathrm{Log}|x-2| + 3\mathrm{Log}|x-3| + C$

25) $\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{Log}\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| +$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}x+1\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}x-1\right) + C$$

26) $\displaystyle\int \frac{x^5}{\left(x^2+1\right)^3}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(1+x^2\right) + \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} + C$

27) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\left(x^3+1\right)^2} = -\frac{2}{3}\operatorname{Log}\left|x^3\right| - \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + \frac{2}{3}\operatorname{Log}\left|x^3+1\right| - \frac{1}{3}\frac{1}{x^3+1} + C$

28) $\displaystyle\int \frac{x^5}{\left(x^3+1\right)\left(x^3+8\right)}\,dx = -\frac{1}{21}\operatorname{Log}\left|x^3+1\right| + \frac{8}{21}\operatorname{Log}\left|x^3+8\right| + C$

29) $\displaystyle\int \frac{x^7-x^3}{x^{12}-2x^4-1}\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(x^4+1\right) + \frac{1}{4}\operatorname{Log}\left|x^8-x^4+1\right| +$

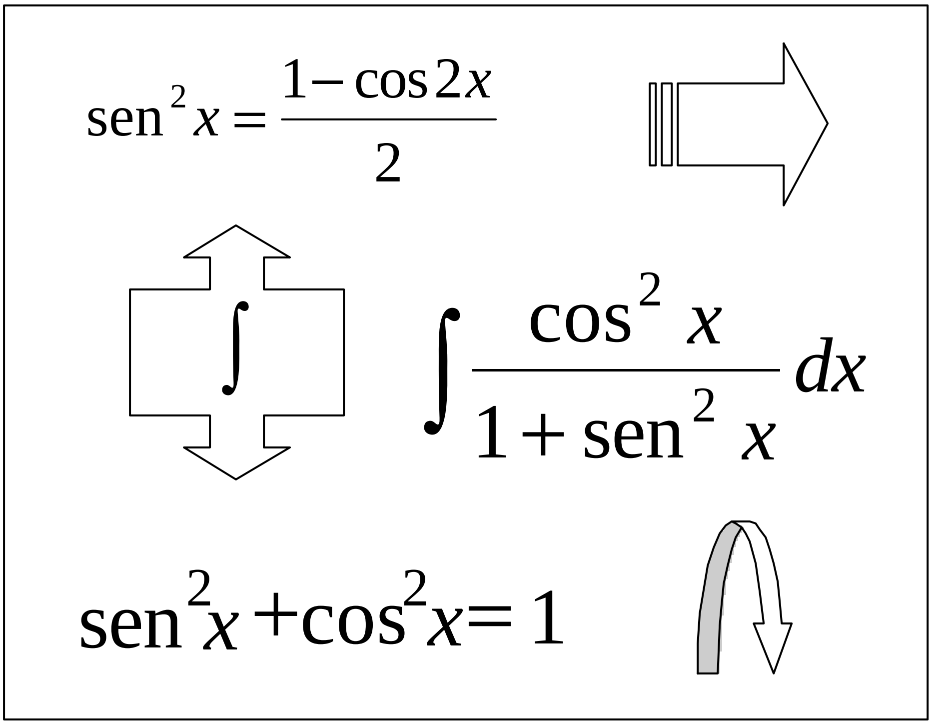
$\displaystyle + \frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{Log}\left|\frac{2x^4-1+\sqrt{5}}{2x^4-1-\sqrt{5}}\right| + C$

30) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}\,dx = 2\operatorname{Log}\left|\frac{x-4}{x-2}\right| + \frac{3}{x-4} - \frac{13}{2(x-4)^2} + C$

31) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(x^7+1\right)} = \operatorname{Log}|x| - \frac{1}{7}\operatorname{Log}\left|x^7+1\right| + C$

Capítulo 5
Integración de funciones trigonométricas

Volver
Índice



Capítulo 5
Integración de funciones trigonométricas

Volver
Índice

5.1. Introducción

En este capítulo trataremos el problema de la integración de funciones racionales que contengan solamente funciones trigonométricas. El caso más general en que dichas funciones son irracionales se verá en el próximo capítulo. A pesar de ello, algunos cambios de variables estudiados aquí pueden ser válidos también cuando aparezcan funciones irracionales.

Para la resolución de integrales de funciones racionales que contengan a funciones trigonométricas, es necesario conocer algunas de las distintas relaciones más habituales que existen entre las funciones trigonométricas, de las que hacemos una breve relación:

1) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \operatorname{tag}^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

2) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

3) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

4) $\operatorname{sen} x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

5) $\operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)\right]$

$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x - y) - \cos(x + y)\right]$

$\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x - y) + \cos(x + y)\right]$

5.2. Cambios de variable

Volver
Índice

Vamos a resolver integrales de funciones racionales de funciones trigonométricas, a las que denotaremos en general por $R(\text{sen}x,\ \cos x)$, mediante una serie de cambios de variable que nos mostrarán que la función $R(\text{sen}x,\ \cos x)$ es integrable de manera sencilla. Con estos cambios de variable, pasaremos a una función integrable de manera inmediata o a una función racional de las estudiadas en el capítulo anterior, quedando el problema resuelto de una forma u otra. La elección del cambio de variable que resuelve una integral del tipo tratado aquí dependerá de cómo sea la función $R(\text{sen}x,\ \cos x)$. Además, una vez elegido el cambio de variable que parezca más apropiado, deberemos obtener las expresiones de sen$x$ y cos$x$ en función de esta nueva variable (ya que cualquier otra función trigonométrica se puede expresar fácilmente en términos de estas dos) así como del término dx en función de la diferencial de la nueva variable. Veamos los diferentes cambios de variable que podremos aplicar:

A) Cambio $tg\left(\dfrac{x}{2}\right)=t$. Este cambio de variable siempre se puede utilizar; pero, en general, cuando se pueda realizar alguno de los otros cambios que veremos más adelante, resultará en una integral más sencilla a resolver. Para el cálculo de sen$x$ y cos$x$ en términos de t, usamos las fórmulas del ángulo doble y la igualdad fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}x=\frac{2\text{sen}(x/2)\cos(x/2)}{\text{sen}^2(x/2)+\cos^2(x/2)}=\frac{2\text{tg}(x/2)}{\text{tg}^2(x/2)+1}\quad\Rightarrow\quad\text{sen}x=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2(x/2)-\text{sen}^2(x/2)}{\text{sen}^2(x/2)+\cos^2(x/2)}=\frac{1-\text{tg}^2(x/2)}{1+\text{tg}^2(x/2)}\quad\Rightarrow\quad\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Finalmente, para calcular dx derivamos miembro a miembro la igualdad dada por el cambio de variable y despejamos, obteniendo que:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Con este cambio la integral original queda de la forma:

$$\int R(\operatorname{sen}x, \cos x)\, dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{dt}{1+t^2}$$

que resulta en una integral de una función racional del tipo de las vistas en el capítulo anterior.

Ejemplo

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \text{Log } |\, t \,| + C = \text{Log } |\text{tg}(x/2)| + C$$

Nota

Para los siguientes cambios de variable necesitamos recordar los conceptos de simetrías para funciones de dos variables, generalizados de manera natural de los análogos para una variable:

$f(x , y)$ es impar en x si $f(-x , y) = - f(x , y)$
$f(x , y)$ es impar en y si $f(x , -y) = - f(x , y)$
$f(x , y)$ es par en x e y si $f(-x , -y) = f(x , y)$

En nuestro caso, identificaremos a la función de dos variables como la función racional de funciones trigonométricas, es decir, $f(x , y) \equiv R(\operatorname{sen}x, \cos x)$. Cada una de estas tres simetrías da lugar a un cambio de variable distinto.

B) Si $R(\operatorname{sen}x, \cos x)$ es una función par en sen$x$ y cos$x$, es decir, se tiene que $R(-\operatorname{sen}x, -\cos x) = R(\operatorname{sen}x, \cos x)$, entonces el cambio a realizar es de la forma: $\text{tg}x = t$. Utilizando las relaciones entre sen$x$, cos$x$, y tg$x$, obtenemos:

$$1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \Rightarrow \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\operatorname{sen}x = \operatorname{tg}x \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{sen}x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Finalmente, derivando miembro a miembro, $\operatorname{tg}x = t \Rightarrow \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

A pesar de las expresiones irracionales que aparecen en la obtención de las expresiones de sen$x$, cos$x$, en función de la nueva variable t, éstas desaparecen en la integral que resulta una vez realizado el cambio de variable, debido a la simetría par en sen$x$, cos$x$, y al tipo de operaciones (productos) que aparecen. Un caso particular sería:

$$I = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \; (m,n \text{ de igual paridad}) =$$

$$= \int \frac{t^m}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^m} \frac{1}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^n} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^m}{\left(1+t^2\right)^{1+\frac{m+n}{2}}} dt \,,$$

donde $\dfrac{m+n}{2}$ es un entero.

Ejemplo

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{\left(1+2t^2\right)\left(1+t^2\right)}$$

Esta integral es del tipo de las estudiadas en el capítulo anterior, como cociente de polinomios en t. Aparecen dos parejas de raíces complejas conjugadas simples como ceros del denominador, por lo que, aplicando el método de fracciones simples, resulta en una descomposición del tipo:

$$\frac{1}{\left(1+2t^2\right)\left(1+t^2\right)} = \frac{Mt+N}{1+2t^2} + \frac{Pt+Q}{1+t^2}$$

donde, poniendo denominador común e igualando los numeradores que resultan, llegamos al sistema que nos proporcionará el valor de las constantes, sin más

que igualar los coeficientes de los términos del mismo grado a ambos lados de la igualdad:

t^3 :	$0 = M+2P$
t^2 :	$0 = N+2Q$
t :	$0 = M+P$
1:	$1 = N+Q$

Resolviendo: $M = 0,\ N = 2,\ P = 0,\ Q = -1$
Así, la integral queda:

$$I = 2\int \frac{dt}{1+2t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}t\right)^2+1}\,dt - \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \sqrt{2}\ \text{arctg}\left(\sqrt{2}\,t\right) - \text{arctg}\ t + C = \sqrt{2}\ \text{arctg}\left(\sqrt{2}\ \text{tgx}\right) - x + C$$

C) Si $R(\text{sen}x,\ \cos x)$ es impar en $\cos x$, es decir, $R(\text{sen}x,\ -\cos x) = -R(\text{sen}x,\ \cos x)$ entonces:

$$\int \frac{R(\text{sen}x, \cos x)}{\cos x}\cos x\, dx = \int R_1\left(\text{sen}x, \cos x\right)\cos x\, dx$$

donde $R_1(\text{sen}x,\ \cos x)$ es par en $\cos x$, y haciendo el cambio $\text{sen}x = t$, llegamos a la integral de una función racional de las estudiadas en el capítulo anterior. De manera sencilla, con este cambio se obtiene que:

$$\cos x = \sqrt{1-t^2} \qquad , \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Como en el caso anterior, no aparecerán funciones irracionales en la nueva integral, debido a la imparidad de la función $\cos x$.
Un caso particular, con n impar, sería:

$$I = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \int t^m \left(\sqrt{1-t^2}\right)^n \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^m \left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dt$$

que es integrable de manera sencilla, puesto que si n es impar, $n-1$ es par, y así, $\frac{n-1}{2}$ es entero.

Ejemplo

$$I = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{1}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}$$

Las raíces del denominador de este cociente de polinomios son reales dobles, $t = 1$, $t = -1$, por lo que, aplicando el método de descomposición de facciones simples, llegamos a que:

$$\frac{1}{\left(1-t^2\right)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2}$$

Poniendo denominador común:

$$1 = A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1-t)^2(1+t) + D(1-t)^2$$

Dando valores a la variable t, los de las raíces reales distintas, y otros dos más de manera arbitraria, se llega al sistema cuya solución son los valores de las constantes a determinar:

$t = 1$: $1 = 4B$

$t = -1$: $1 = 4D$

$t = 0$: $1 = A + B + C + D$

$t = 2$: $1 = -9A + \frac{9}{4} + 3C + \frac{1}{4}$

Resolviendo:

$$A=\frac{1}{4}\ , \qquad B=\frac{1}{4}\ , \qquad C=\frac{1}{4}\ , \qquad D=\frac{1}{4}$$

Así, la integral queda de la forma:

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1-t)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t)^2}=$$
$$=-\frac{1}{4}\text{Log}\mid 1-t\mid+\frac{1}{4(1-t)}+\frac{1}{4}\text{Log}\mid 1+t\mid-\frac{1}{4(1+t)}+C=$$
$$=\frac{1}{4}\text{Log}\frac{\mid 1+\text{sen}x\mid}{\mid 1-\text{sen}x\mid}+\frac{1}{4(1-\text{sen}x)}-\frac{1}{4(1+\text{sen}x)}+C$$

D) De forma similar al caso anterior, si $R(\text{sen}x,\ \cos x)$ es impar en sen$x$, es decir, si $R(-\text{sen}x,\ \cos x) = -R(\text{sen}x,\ \cos x)$, el cambio de variable a realizar será de la forma $\cos x = t$, puesto que:

$$\int R(\text{sen}x,\cos x)\,dx=\int\frac{R(\text{sen}x,\cos x)\,\text{sen}x}{\text{sen}x}\,dx=\int R_1(\text{sen}x,\cos x)\,dx$$

donde $R_1(\text{sen}x,\ \cos x)$ es par en sen$x$. Así, como en el caso anterior, se obtiene de manera inmediata que:

$$\cos x=t\ , \qquad \text{sen}x=\sqrt{1-t^2}\ , \qquad dx=\frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Un caso particular sería, con m impar:

$$I=\int\text{sen}^m x\cos^n x\,dx=\int\cos^n x\,\text{sen}^{m-1}x\,\text{sen}x\,dx=$$
$$=-\int t^n\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m-1}dt$$

que es integrable de forma sencilla, puesto que, si m es impar, $m - 1$ es par, y, por tanto, $\frac{m-1}{2}$ es entero.

Ejemplo

$$I=\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x+2\cos^2 x\operatorname{sen} x}\,dx=\int\frac{t}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3+2t^2\sqrt{1-t^2}}\frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=-\int\frac{tdt}{\left(1-t^2\right)^2+2t^2\left(1-t^2\right)}=-\int\frac{tdt}{\left(1-t^2\right)\left(1-t^2+2t^2\right)}=$$

$$=-\int\frac{tdt}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}$$

Las raíces del denominador son $t = 1$, $t = -1$, reales simples, y una pareja de complejas conjugadas simples. De nuevo, el método de fracciones simples nos proporciona la siguiente descomposición:

$$\frac{-t}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{1-t}+\frac{Ct+D}{1+t^2}=$$

$$=\frac{A(1-t)\left(1+t^2\right)+B(1+t)\left(1+t^2\right)+(Ct+D)\left(1-t^2\right)}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}$$

Dando valores a la variable t, resulta el sistema:

$t = 1$: $\quad -1 = 4B$
$t = -1$: $\quad 1 = 4A$
$t = 0$: $\quad 0 = A + B + D$
$t = 2$: $\quad -2 = -5A + 15B - 6C - 3D$

cuya única solución es:

$$A=\frac{1}{4},\qquad B=-\frac{1}{4},\qquad C=-\frac{1}{2},\qquad D=0$$

Por lo que, la integral original se puede descomponer como:

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1-t}-\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\text{Log}\,|1+t|+\frac{1}{4}\text{Log}\,|1-t|-\frac{1}{4}\text{Log}\,|t^2+1|+C=$$

$$=\text{Log}\sqrt[4]{\frac{|1-t^2|}{|1+t^2|}}+C=\text{Log}\sqrt[4]{\frac{|1-cos^2x|}{|1+cox^2x|}}+C=$$

$$=\text{Log}\sqrt[4]{\frac{\text{sen}^2x}{1+\cos^2x}}+C$$

Volver Índice

5.3. Transformación en sumas

Estos cambios de variables que hemos visto no son, obviamente, la única posibilidad que existe para resolver integrales racionales de funciones trigonométricas. En general, merece la pena estudiar de manera breve la función que queremos integrar, por si la aplicación de alguna de las relaciones trigonométricas conocidas nos permite reducir dicha función de forma sencilla a otra función cuya integración sea mucho más rápida. Además, no todas las funciones racionales de funciones trigonométricas aparecen en la forma en la que podemos aplicar alguno de los cambios de variable comentado. Por ejemplo, si en la función a integrar aparecen razones trigonométricas de ángulos distintos, un primer paso necesario consiste en pasarlas todas al mismo ángulo. En este caso, las ecuaciones que nos relacionan los productos de razones trigonométricas de ángulos distintos con sumas de razones trigonométricas pueden resolver el problema:

a) $\int\text{sen}(mx)\text{sen}(nx)\,dx=\frac{1}{2}\int\cos[(m-n)x]\,dx-\frac{1}{2}\int\cos[(m+n)x]\,dx$

b) $\int\text{sen}(mx)\cos(nx)\,dx=\frac{1}{2}\int\text{sen}[(m-n)x]\,dx+\frac{1}{2}\int\text{sen}[(m+n)x]\,dx$

c) $\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos[(m-n)x]\,dx + \frac{1}{2}\int \cos[(m+n)x]\,dx$

Nótese que, aunque las razones trigonométricas que aparecen sumando también se refieren a ángulos distintos, la diferencia fundamental estriba en que, mientras las integrales de productos no se pueden separar, las integrales de sumas sí pueden hacerlo en sumas de integrales, por la linealidad de la integral, apareciendo de esta forma los ángulos distintos en integrales distintas, lo que, obviamente, no es ningún problema.

5.4. Problemas resueltos

Volver Índice

1) $I = \int \frac{1+\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x\cos x}\,dx = \{\ \operatorname{tg}(x/2) = t\ \} = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\,\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2dt}{1+t^2} =$

$= \int \frac{t^2+2t+1}{2t\left(1-t^2\right)}\,2dt = \int \frac{(t+1)^2}{t\left(1-t^2\right)}\,dt = \int \frac{t+1}{t(1-t)}\,dt$

Las raíces del denominador son reales simples; por lo tanto, el método a utilizar será el de fracciones simples.

$\frac{t+1}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} \Rightarrow \quad t+1 = A(1-t) + B\,t \;\Rightarrow\quad A=1\ ,\ B=2$

$I = \int \frac{dt}{t} + 2\int \frac{dt}{1-t} = \operatorname{Log}|\,t\,| - 2\operatorname{Log}|1-t\,| + C =$

$= \operatorname{Log}|\operatorname{tg}(x/2)| - 2\operatorname{Log}|1-\operatorname{tg}(x/2)| + C$

2) $I = \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg}x} = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x}\,dx = \{\ \operatorname{tg}(x/2) = t\ \} =$

$$= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{1-t^2}{\left(2t+1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}dt$$

Las raíces del denominador son dos irracionales y otras dos complejas conjugadas, todas ellas simples. Si aplicamos el método de fracciones simples para descomponer esta función, deberemos trabajar con números irracionales. Antes de seguir adelante, probemos otro cambio de variable distinto de este general. Obsérvese que la función a integrar es par en sen$x$, cos$x$, por lo que podemos intentar el cambio de variables tg$x = t$.

$$I = \int \frac{dx}{1+tg\,x} = \{\ \mathrm{tg}x = t\ \} = \int \frac{1}{1+t}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{(1+t)\left(1+t^2\right)}$$

Aunque en este caso, también aplicaremos el método de descomposición de fracciones simples, las raíces del denominador ahora son una entera $t = -1$, y una pareja de complejas conjugadas, todas simples. A diferencia del cambio de variable anterior, hemos salvado operar con números irracionales.

$$\frac{1}{(1+t)\left(1+t^2\right)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

Poniendo denominador común, obtenemos que:

$$1 = A(t^2+1)+(B\,t+C)(t+1) = A\,t^2 + A + B\,t^2 + B\,t + C\,t + C$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, obtenemos el siguiente sistema:

t^2 :	$0 = A + B$
t:	$0 = B + C$
1:	$1 = C$

cuya solución es:

$$A = \frac{1}{2}\ , \qquad B = -\frac{1}{2}\ , \qquad C = \frac{1}{2}$$

La integral original quedará como:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\,\text{Log}|t+1| - \frac{1}{4}\,\text{Log}|t^2+1| + \frac{1}{2}\,\text{arctg}\ t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{Log}\ |1+\text{tg}x| - \frac{1}{4}\,\text{Log}\ |1+\text{tg}^2 x| + \frac{1}{2}\,x + C$$

3) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{2\text{sen}x - \cos x + 5} = \{\ \text{tg}(x/2) = t\ \} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$

$$= \int \frac{2dt}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2} = \int \frac{2dt}{6t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{5}{3}} = \frac{3}{5}\int \frac{dt}{\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\text{arctg}\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\,\text{arctg}\left(\frac{1+3tg(x/2)}{\sqrt{5}}\right) + C$$

4) $I = \displaystyle\int \frac{\text{sen}x}{1+\cos x + \text{sen}x}\,dx = \{\ \text{tg}(x/2) = t\ \} = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\,\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} =$

$$= \int \frac{4tdt}{(1+t^2)(1+t^2+1-t^2+2t)} = \int \frac{4tdt}{2(1+t^2)(t+1)} =$$

$$= \int \frac{2t\,dt}{(t+1)(t^2+1)}$$

Una vez más, las raíces del denominador nos permiten aplicar el método de descomposición de fracciones simples:

$$\frac{2t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \Rightarrow$$

$$2t = At^2 + A + Bt^2 + Bt + Ct + C$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, obtenemos:

t^2 :	$0 = A + B$
t:	$2 = B + C$
1:	$0 = A + C$

cuya solución es:

$$A = -1\ ,\ B = 1\ \ ,\ C = 1$$

La integral queda como:

$$I = -\int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{t+1}{t^2+1}\,dt = -\operatorname{Log}|t+1| + \frac{1}{2}\operatorname{Log}|t^2+1| + \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= -\operatorname{Log}|1+\operatorname{tg}(x/2)| + \frac{1}{2}\operatorname{Log}|1+\operatorname{tg}^2(x/2)| + \frac{x}{2} + C$$

5) $$I = \int \frac{\operatorname{sen}x\cos x + \cos^4 x}{2+\operatorname{sen}x\cos x}\,dx = \{\ \operatorname{tg}x = t\ \} =$$

$$= \int \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^4}}{2+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}}{2+\frac{t}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{t\left(1+t^2\right)+1}{\left(1+t^2\right)^2}}{\frac{2\left(1+t^2\right)+t}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{t^3+t+1}{\left(1+t^2\right)^2\left(2t^2+t+2\right)}dt$$

En este caso, el denominador posee una pareja de raíces complejas conjugadas dobles, por lo que es necesario aplicar el método de descomposición de Hermite:

$$\frac{t^3+t+1}{\left(1+t^2\right)^2\left(2t^2+t+2\right)} = \frac{d}{dt}\left[\frac{at+b}{1+t^2}\right]+\frac{Mt+N}{1+t^2}+\frac{Pt+Q}{2t^2+t+2}$$

Realizando la derivada del cociente, poniendo denominador común e igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al siguiente sistema lineal que nos proporcionará el valor de las constantes:

$$\begin{array}{ll}
t^5: & 0 = 2M + P \\
t^4: & 0 = -2a + M + 2N + Q \\
t^3: & 1 = -4b - a + 4M + N + 2P \\
t^2: & 0 = -2b + M + 4N + 2Q \\
t: & 1 = a - 4b + 2M + N + P \\
1: & 1 = 2a + 2N + Q
\end{array}$$

cuya única solución resulta ser:

$$a = 0 \ , \ b = \frac{1}{2} \ , \ M = -1, \ P = 2 \ , \ \ Q = -5$$

Llevamos estos valores a la integral original, con lo que:

$$I = \frac{1}{2(1+t^2)} + \int \frac{3-t}{t^2+1} dt + \int \frac{2t-5}{2t^2+t+2} dt = \frac{1}{2(1+t^2)} +$$

$$+3\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left|t^2+1\right| + \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left|2t^2+t+2\right| - \frac{11}{2} \int \frac{dt}{2t^2+t+2}$$

Calculemos esta nueva integral por separado:

$$I_1 = \int \frac{dt}{2t^2+t+2} = \int \frac{dt}{\left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{15}{8}} = \frac{8}{15} \int \frac{dt}{\left(\frac{4t+1}{\sqrt{15}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15}}{15} \operatorname{arctg}\left(\frac{4t+1}{\sqrt{15}}\right) + C$$

Por tanto, la integral I quedará de la siguiente forma:

$$I = \frac{1}{2(1+t^2)} + 3 \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(t^2+1\right) + \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left|2t^2+t+2\right| -$$

$$- \frac{11}{2} \frac{2\sqrt{15}}{15} \operatorname{arctg}\left(\frac{4t+1}{\sqrt{15}}\right) + C$$

$$I = \frac{1}{2(1+\operatorname{tg}^2 x)} + \operatorname{Log} \sqrt{\frac{2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 2}{1+\operatorname{tg}^2 x}} - \frac{11}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1+4\operatorname{tg} x}{\sqrt{15}}\right) + C$$

6) $I = \int \frac{\text{sen}^3 x}{1+\cos x} dx = \int \frac{\text{sen}x\left(1-\cos^2 x\right)}{1+\cos x} dx = \int \text{sen}x\left(1-\cos x\right) dx =$

$= \int \text{sen}x\, dx - \int \text{sen}x \cos x\, dx = -\cos x - \frac{1}{2}\, \text{sen}^2 x + C$

7) $I = \int \frac{2+\text{Log}^2 |x|}{x\,\text{Log}\, |x| - x} dx = \{\ \text{Log}x = t \ \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt\ \} = \int \frac{2+t^2}{t-1} dt =$

$= \int (t+1)\, dt + 3 \int \frac{dt}{t-1} = \frac{t^2}{2} + t + 3\text{Log}\, |t-1| + C =$

$= \frac{\text{Log}^2 |x|}{2} + \text{Log}\, |x| + 3\text{Log}\left|\text{Log}|x| - 1\right| + C$

8) $I = \int \frac{\text{sen}(x/2)\cos(5x/2)}{\text{sen}3x} dx$

Como las razones trigonométricas que aparecen en la integral están referidas a ángulos distintos, el primer paso, antes de pensar en algún cambio de variable, debe ser intentar pasar esta expresión a otra igual donde las nuevas razones trigonométricas estén referidas al mismo ángulo. Utilizamos para ello las fórmulas que relacionan productos con sumas de funciones trigonométricas.

$\text{sen}A\cos B = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B)\right]$ Þ

$\text{sen}(x/2)\cos(5x/2) = \frac{1}{2}\left(\text{sen}3x - \text{sen}2x\right)$

$\text{sen}2x = 2\text{sen}x\cos x$

$\text{sen}3x = \text{sen}(2x+x) = \text{sen}x\cos 2x + \cos x\,\text{sen}2x =$

$= \text{sen}x\cos^2 x - \text{sen}^3 x + 2\text{sen}x\cos^2 x =$

$= 3\text{sen}x\cos^2 x - \text{sen}^3 x = 3\text{sen}x\left(1-\text{sen}^2 x\right) - \text{sen}^3 x =$

$= \text{sen}x\left(3 - 4\text{sen}^2 x\right)$

Así, tenemos que:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}3x - \operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}3x}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}3x}\,dx$$

$$I_1 = \int \frac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}3x}dx = 2\int \frac{\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}x\left(3-4\operatorname{sen}^2 x\right)}dx = 2\int \frac{\cos x}{3-4\operatorname{sen}^2 x}\,dx =$$

$$= \{\ \operatorname{sen}x = t \Rightarrow \cos x\ dx = dt\ \} = 2\int \frac{dt}{3-4t^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1-\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \left\{ \frac{2t}{\sqrt{3}} = u \ \Rightarrow\ dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{du} \right\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{1-u^2}$$

Esta última integral la descomponemos por el método de fracciones simples:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A(1+u)+B(1-u)}{1-u^2} \Rightarrow \ A = \frac{1}{2}\ ,\ B = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{Log}|1-u| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{Log}|1+u| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{Log}\frac{|1+u|}{|1-u|} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{Log}\frac{|\sqrt{3}+2t|}{|\sqrt{3}-2t|} + C$$

Finalmente,

$$I = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{Log}\frac{|\sqrt{3}-2\operatorname{sen}x|}{|\sqrt{3}+2\operatorname{sen}x|} + \mathrm{C}$$

Volver
Índice

5.5. Integración por recurrencia

Veremos aquí una técnica general de integración, llamada integración por recurrencia, en el caso particular que nos ocupa en este capítulo, es decir, para funciones racionales que contengan a funciones trigonométricas. Esta técnica se aplica para el cálculo de integrales de funciones que dependan de algún parámetro, expresando la integral deseada en términos de otra de similar enunciado en la que el parámetro haya disminuido. Una vez conseguida esta relación, bastará aplicar recurrencia para poder expresar la integral original en función del parámetro y de otra integral que ya no contenga a dicho parámetro.

Ejemplo

$$I_{m,n} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

Para calcular esta integral, tomamos partes de la siguiente manera:

Si $m < 0$ y $n > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u = \cos^{n-1} x & \Rightarrow & du = (n-1)\cos^{n-2} x \, (-\operatorname{sen} x) dx \\ dv = \operatorname{sen}^m x \cos x \, dx & \Rightarrow & v = \dfrac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} \end{array} \right\}$$

Además, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^{m+2} x = \operatorname{sen}^m x \, (1 - \cos^2 x)$, obtenemos

$$I_{m,n} = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^{m+2} x \, dx =$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x \, dx -$$

$$- \frac{n-1}{m+1} \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \, I_{m,n-2} -$$

$$-\frac{n-1}{m+1}\, I_{m,n}$$

Despejando $I_{m,n}$ en esta igualdad, resulta que:

$$I_{m,n} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

Si $m > 0$ y $n < 0$:

$$\left\{\begin{array}{lcr} u = \operatorname{sen}^{m-1} x & \Rightarrow & du = (m-1)\operatorname{sen}^{m-2} x \cos x\, dx \\ dv = \cos^{n} x \ \operatorname{sen} x\, dx & \Rightarrow & v = -\dfrac{\cos^{n+1} x}{n+1} \end{array}\right\}$$

Procediendo análogamente, llegamos a que:

$$I_{m,n} = -\frac{\cos^{n+1} x \operatorname{sen}^{m-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$$

Si $m < 0$ y $n < 0$, en lugar de despejar $I_{m,n}$, se despejan $I_{m-2,n}$ o $I_{m,n-2}$

En cualquiera de las tres posibilidades, aplicando de forma sucesiva la integración por partes a cada nueva integral que va apareciendo, todo se reduce a calcular $I_{m,0}$, o $I_{0,n}$. Veamos cómo se calcularían éstas últimas:

$$I_{m,0} = \int \operatorname{sen}^{m} x\, dx$$

Elegimos integración por partes, de la siguiente manera:

$$\left\{\begin{array}{lcr} u = \operatorname{sen}^{m-1} x & \Rightarrow & du = (m-1)\operatorname{sen}^{m-2} x \cos x\, dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx & \Rightarrow & v = -\cos x \end{array}\right\}$$, de modo que tenemos

$$I_{m,0} = -\cos x \operatorname{sen}^{m-1} x + (m-1)\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^2 x \, dx$$

y, como, de nuevo,

$$\operatorname{sen}^{m-2} x \cos^2 x = \operatorname{sen}^{m-2} x \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) = \operatorname{sen}^{m-2} x - \operatorname{sen}^m x$$

se tiene que la igualdad anterior queda como:

$$I_{m,0} = -\cos x \operatorname{sen}^{m-1} x + (m-1)\int \operatorname{sen}^{m-2} x \, dx - (m-1)\int \operatorname{sen}^m x \, dx =$$

$$= -\cos x \operatorname{sen}^{m-1} x + (m-1) I_{m-2,0} - (m-1) I_{m,0}$$

Despejando $I_{m,0}$ de esta igualdad:

$$I_{m,0} = -\frac{\cos x \operatorname{sen}^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m} I_{m-2,0}$$

De nuevo obtenemos una recurrencia, pero, a diferencia del caso anterior, ésta sólo depende de un parámetro, y bastará conocer el valor de $I_{0,0}$, o de $I_{1,0}$. En cualquiera de los dos casos, resultan en integrales inmediatas, ya que:

$$I_{0,0} = \int dx = x + C \quad , \quad I_{1,0} = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

Para el cálculo de $I_{0,n} = \int \cos^n x \, dx$, procediendo de manera análoga, se llega a que:

$$I_{0,n} = \int \cos^n x \, dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

Similarmente, bastará conocer el valor de $I_{0,0}$, o de $I_{0,1}$. En cualquiera de los dos casos, también resultan en integrales inmediatas, ya que:

$$I_{0,0} = \int dx = x + C \quad , \quad I_{0,1} = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$

Ejercicios propuestos

Volver
Índice

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{Log}\left|\frac{1+\operatorname{tg}(x/2)}{1-\operatorname{tg}(x/2)}\right| + C$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x + 2} = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}\right) + C$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+3\cos x} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{2}\right) + C$

5) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\, dx = x + \frac{2}{1+\operatorname{tg}(x/2)} + C$

6) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\cos x}\, dx = \operatorname{Log}\left|\frac{1+\cos x}{\cos x}\right| + C$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos^2 x} = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + \frac{1}{\cos x} + C$

8) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos^2 x - 4\operatorname{sen} x - 6}\, dx = -\operatorname{arctg}(2+\operatorname{sen} x) + C$

9) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}x} + C$

11) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen}x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$

12) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg}x + x + C$

13) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

14) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{Log}\left|\cos x\right| + C$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{sen}x + \cos x)^2} = -\frac{1}{1+\operatorname{tg}x} + C$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\operatorname{tg}x)\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}x\right| - \frac{1}{\operatorname{tg}x} + \operatorname{Log}\left|1+\operatorname{tg}x\right| + C$

17) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{1-2\operatorname{sen}x}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}x - \frac{3}{8}\operatorname{Log}\left|2\operatorname{sen}x - 1\right| + C$

18) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 6\operatorname{sen}x + 5}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{Log}\left|\frac{\operatorname{sen}x - 5}{\operatorname{sen}x - 1}\right| + C$

19) $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen}x+\cos x}{1+\operatorname{sen}x-\cos x}\,dx = 2\operatorname{Log}\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}(x/2)}\right| - x + C$

20) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2\operatorname{sen} x - \cos x + 3}\,\mathrm{dx} =$

$$= -\frac{x}{5} + \frac{2}{5}\operatorname{Log}\left|\frac{2\operatorname{tg}^2(x/2) + 2\operatorname{tg}(x/2) + 1}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}\right| + \frac{3}{5}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}(x/2) + 1\right) + C$$

21) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - 2\cos x + 1}\,\mathrm{dx} = = -\frac{2x}{5} - \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|1 + \operatorname{tg}(x/2)\right| +$

$$+ \frac{9}{10}\operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}(x/2) - 1/3\right| - \frac{1}{5}\operatorname{Log}\left|1 + \operatorname{tg}^2(x/2)\right| + C$$

22) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x - 3\cos x + 4} = \operatorname{Log}\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2) + 1/3}{\operatorname{tg}(x/2) + 1}\right| + C$

23) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{2 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx = -x + \sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{tg} x\right) + C$

24) $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{3 - 4\cos^2 x}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{Log}\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1}\right| + C$

25) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 + 2\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{Log}\left|\frac{2\operatorname{sen}^2 x - 1 + \sqrt{3}}{2\operatorname{sen}^2 x - 1 - \sqrt{3}}\right| + C$

26) $\displaystyle\int \frac{\cos x \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x}\,dx =$

$$= -\operatorname{Log}\left|1 + \operatorname{sen} x\right| + \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{Log}\left|\frac{2\operatorname{sen} x - 1 + \sqrt{5}}{2\operatorname{sen} x - 1 - \sqrt{5}}\right| + C$$

27) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\cos 2x}} = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} x) + C$

28) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right) + C$

29) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \sqrt{\cos x}\; dx = -\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + \frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x} + C$

30) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + 2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg} x\right) + C$

31) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 6\operatorname{sen} x + 12}\, dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen} x - 3}{\sqrt{3}}\right) + C$

32) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}}\, dx = -\operatorname{Log}\left|\cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}\right| + C$

33) $\displaystyle\int \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x \left(\cos^2 x + 2\cos x + 2\right)}\, dx =$

$$= \frac{1}{5}\operatorname{Log}\left|\frac{1 - \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 2\cos x + 2}}\right| - \frac{2}{5}\operatorname{arctg}(1 + \cos x) + C$$

34) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x}\, dx = \operatorname{Log}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1}\right| + C$

35) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x/2)\cos(5x/2)}{\operatorname{sen} 3x}\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{Log}\left|\frac{\sqrt{3} + 2\operatorname{sen} x}{\sqrt{3} - 2\operatorname{sen} x}\right| + C$

Volver
Índice

Capítulo 6
Integración de funciones irracionales

$$\int R(x, x^{p/q}, x^{r/s}, \ldots, x^{u/v})dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2 - b^2}}$$

$$\int \sqrt{a^2x^2 + b^2}\,dx$$

Capítulo 6
Integración de funciones irracionales

6.1. Introducción

Volver
Índice

En este capítulo trataremos de resolver integrales de funciones irracionales de polinomios. En el caso más general de funciones irracionales que afecten a otras funciones cualesquiera, se podrán intentar primero procedimientos de integración para reducir esas integrales a estas que vamos a estudiar.

En general, se tratará de «eliminar» las raíces de la función a integrar a través de algún cambio de variable apropiado. Obviamente, algunas funciones con raíces en su formulación poseen una primitiva de manera inmediata, en las que no será necesario «eliminar» dicha raíz.

6.2. Integrales irracionales simples

En primer lugar, vamos a contemplar el caso más sencillo, en el que las funciones irracionales afecten solamente a monomios en la variable *x*, permitiendo además que las raíces que aparezcan posean índices distintos. Así, sea $I = \int R\left(x, x^{p/q}, x^{r/s}, \ldots, x^{u/v}\right) dx$, donde por R denotamos la función en la que van a aparecer las raíces de x. Para que desaparezcan todas las raíces de distintos índices a la vez, basta con realizar el cambio de variable:

$$x = t^N \text{, donde } N = m.c.m.(q,s,\ldots,v) \text{, y, por tanto,} \quad dx = Nt^{N-1}\,dt$$

Ejemplo

$$I = \int \frac{1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt[3]{x}}\, dx$$

En este caso, el mínimo común múltiplo de todos los índices distintos que aparecen en la función a integrar es $N = 6$, y, por lo tanto, haciendo el cambio de variable, $x = t^6$, con lo que $dx = 6t^5\,dt$, la integral I queda de la forma:

$$I = \int \frac{1+t^3+t^4}{1+t^2} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^9+t^8+t^5}{t^2+1} dt$$

La función que resulta a integrar es un cociente de polinomios donde el grado del numerador es estrictamente mayor que el del denominador. El primer paso será, como vimos en el capítulo 4, realizar la división entera de polinomios. Una vez realizada, llegamos a que I queda:

$$I = 6 \int \left(t^7+t^6-t^5-t^4+2t^3+t^2-2t-1\right) dt + 6 \int \frac{2t+1}{t^2+1} dt =$$

$$= \frac{6t^8}{8} + \frac{6t^7}{7} - \frac{6t^6}{6} - \frac{6t^5}{5} + \frac{12t^4}{4} + \frac{6t^3}{3} - \frac{12t^2}{2} - 6t +$$

$$+ 6 \text{ Log}\left|t^2+1\right| + 6 \text{ arctg } t + C = \frac{3}{4} x^{4/3} + \frac{6}{7} x^{7/6} - x - \frac{6}{5} x^{5/6} +$$

$$+ 3x^{2/3} + 2x^{1/2} - 6x^{1/3} - 6x^{1/6} + 6\text{Log}\left|x^{1/3}+1\right| + 6\text{arctg}\left(x^{1/6}\right) + C$$

Volver
Índice

6.3. Integrales irracionales lineales

Consideraremos ahora el caso en que la función a integrar dependa de x, y a lo sumo de cocientes de polinomios de grado uno (lineales), tanto en el numerador como en el denominador. De nuevo, las raíces que afecten a estos términos pueden poseer índic es distintos. Es decir,

$$I = \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{u/v}\right] dx$$

De forma similar al caso anterior, con el objeto de transformar la integral original en otra donde la función a integrar ya no contenga raíces, realizamos el cambio de variable:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N \text{, donde } N = m.c.m.(q,s,\ldots,v)$$

Al igual que en el caso anterior, este cambio garantiza que en la nueva integral todas las raíces han desaparecido, llegando a una función racional de las del tipo estudiado en el capítulo 4.

Nótese que, a diferencia del caso anterior, no hemos escrito la relación general que permite cambiar dx por dt, debido a su expresión demasiado engorrosa, en términos de las constantes. Desde luego, en la práctica habrá que encontrar esta relación, siendo bastante sencilla de hallar.

Ejemplos

1) $I = \int \frac{dx}{(1-2x)^{2/3} - (1-2x)^{1/2}}$

En este ejemplo, identificamos $a = -2$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$, con lo que el cambio de variable a realizar con $N = 6$, será: $1 - 2x = t^6$, de donde se deduce de manera inmediata que $dx = -3t^5 dt$. Con este cambio la integral quedará:

$$I = \int \frac{-3t^5}{t^4 - t^3} \mathrm{dt} = -3\int \frac{t^2}{t-1} \mathrm{dt}$$

De nuevo, el cociente de polinomios que resulta para integrar posee grado del numerador mayor que el del denominador, por lo que, realizando la división entera de polinomios y llevándola a la integral, resulta en:

$$I = -3\int (t+1)\,dt - 3\int \frac{dt}{t-1} = -\frac{3}{2} t^2 - 3t - 3\mathrm{Log}|t-1| + C =$$

$$= -\frac{3}{2}(1-2x)^{1/3} - 3(1-2x)^{1/6} - 3\mathrm{Log}\left|(1-2x)^{1/6} - 1\right| + C$$

2) $I = \int \frac{x^4}{\sqrt{2+x}} dx$

En este caso, tenemos que $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 1$, por lo que el cambio que debemos realizar es de la forma: $2 + x = t^2$, y, así, $dx = 2t\ dt$, quedando la integral como:

$$I = \int \frac{\left(t^2-2\right)^4}{t} 2t\, dt = 2\int \left(t^2-2\right)^4 dt = 2\int \left(t^4-4t^2+4\right)^2 dt =$$
$$= 2\int \left(t^8+16t^4+16-8t^6+8t^4-32t^2\right) dt =$$
$$= 2\int \left(t^8-8t^6+24t^4-32t^2+16\right) dt =$$
$$= \frac{2}{9}(2+x)^{9/2} - \frac{16}{7}(2+x)^{7/2} + \frac{48}{5}(2+x)^{5/2} - \frac{64}{3}(2+x)^{3/2} +$$
$$+ 32(2+x)^{1/2} + C$$

Volver Ejemplo

3) $I = \displaystyle\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1} dx$

Esta integral tiene la forma vista en el apartado 6.2. Nótese que, si elegimos $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, cualquier integral de la forma expresada en 6.2 se puede expresar en la forma vista en 6.3. De hecho, el caso 6.2 no es nada más que un caso particular y previo al caso más general enunciado aquí. De cualquiera de las formas, el cambio de variable necesario es como sigue:

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

De este modo, la integral adopta la expresión:

$$I = \int \frac{2+t^2}{t+t^2+t^3+1} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^7+2t^5}{t^3+t^2+t+1} dt$$

Realizando la división entera de polinomios, quedará reducida a:

$$I = 6\int \left(t^4-t^3+2t^2-2t+1\right) dt + 6\int \frac{-t^2+t-1}{(t+1)\left(t^2+1\right)} dt$$

Calculamos esta nueva integral, que tiene la forma vista en el capítulo 4, como función racional, por separado:

$$I_1 = \int \frac{-t^2 + t - 1}{(t+1)(t^2+1)}\, dt$$

Como veíamos en dicho capítulo, el primer paso es calcular los ceros del denominador (ya que el grado del numerador, 2, es menor estricto que el del denominador, 3). Estos ceros resultan ser $t = -1$, real y simple, y una pareja de números complejos conjugados también simples. Por tanto, la descomposición a efectuar es a través del método de fracciones simples:

$$\frac{-t^2 + t - 1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt + C}{t^2+1} = \frac{At^2 + A + Bt^2 + Bt + Ct + C}{(t+1)(t^2+1)}$$

Colocando denominador común y obteniendo un sistema lineal de ecuaciones para calcular el valor de las constantes indeterminadas, resultan en:

$$A = -\frac{1}{2} \quad , \quad \mathrm{B} = \mathrm{C} = \frac{1}{2}$$

Así,

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{t^2+1} dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left|t+1\right| + \frac{1}{4}\mathrm{Log}\left|t^2+1\right| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, t + C$$

Llevando este resultado a la integral original I, tenemos que:

$$I = \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{4}t^4 + \frac{12}{3}t^3 - \frac{12}{2}t^2 + 6t - 3\mathrm{Log}\left|t+1\right| + \frac{3}{2}\mathrm{Log}\left(t^2+1\right) +$$

$$+3\mathrm{arctg}\, t + C = \frac{6}{5}x^{5/6} - \frac{3}{2}x^{2/3} + 4x^{1/2} - 6x^{1/3} + 6x^{1/6} -$$

$$-3\mathrm{Log}\left|x^{1/6}+1\right| + \frac{3}{2}\mathrm{Log}\left|x^{1/3}+1\right| + 3\mathrm{arctg}\left(x^{1/6}\right) + C$$

4) $I = \int \dfrac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

Una vez más, el cambio de variable a realizar en esta integral es:

$$x = t^6 \Rightarrow \; dx = 6t^5 dt$$

de donde obtenemos que:

$$I = \int \frac{1+t^3-t^4}{1+t^2}6t^5dt = 6\int \frac{-t^9+t^8+t^5}{1+t^2}dt$$

que, realizando la división entera de polinomios, da:

$$I = 6\int\left(-t^7+t^6+t^5-t^4+t^2-1\right)dt + 6\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= -\frac{6}{8}t^8 + \frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{6}t^6 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{6}{3}t^3 - 6t + 6\text{arctg}\, t + C =$$

$$= -\frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{6}{7}x^{7/6} + x - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\text{arctg}\left(x^{1/6}\right) + C$$

5) $I = \int \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$

El cambio de variable ahora queda: $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$, de modo que la integral se convierte en:

$$I = \int \frac{t^2}{t+1}2t\,dt = 2\int \frac{t^3}{t+1}dt =$$

$$= 2\int\left(t^2-t+1\right)dt - 2\int\frac{dt}{t+1} = \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{2}t^2 + 2t - 2\text{Log}\left|t+1\right| + C =$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - x + 2x^{1/2} - 2\text{Log}\left|\sqrt{x}+1\right| + C$$

una vez realizada la dvisión entera de polinomios, y deshecho el cambio de variable.

6) $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}\,dx$

El cambio de variable en este caso queda: $x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3 dt$, con lo que la integral se transforma en:

$$I = \int \frac{t^4\,4t^3}{t^2+t}dt = 4\int \frac{t^6}{t+1}dt =$$
$$= 4\int \left(t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1\right)dt + 4\int \frac{dt}{t+1} =$$
$$= \frac{4}{6}t^6 - \frac{4}{5}t^5 + \frac{4}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{2}t^2 - 4t + 4\,\mathrm{Log}\left|t+1\right| + C =$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{4}{5}x^{5/4} + x - \frac{4}{3}x^{3/4} + 2x^{1/2} - 4x^{1/4} + 4\,\mathrm{Log}\left|x^{1/4}+1\right| + C$$

De nuevo hemos necesitado realizar la división entera de polinomios durante el proceso.

Volver 6.3

7) $I = \displaystyle\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$

Esta función a integrar tiene la forma más general dada en 6.3, donde identificamos $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 2$. Con estos valores, el cambio de variable queda de la forma:

$$\frac{2+x}{2-x} = u^3$$

que permite despejar a la variable x en función de la nueva variable u:

$$x = \frac{2u^3 - 2}{1+u^3}$$

Con esta última relación, el cálculo de dx resulta más sencillo:

$$dx = \frac{12u^2}{\left(1+u^3\right)^2}\,du$$

Llevando todo el cambio completo a la integral original, obtenemos:

$$I = 2\int \frac{1}{\left[2 - \frac{2u^3-2}{1+u^3}\right]^2}\,u\,\frac{12u^2}{\left(1+u^3\right)^2}\,du =$$

$$= 24\int \frac{u^3}{\left[\frac{4}{1+u^3}\right]^2\left(1+u^3\right)^2}\,du = \frac{24}{16}\int u^3du = \frac{3}{2}\frac{u^4}{4} + C =$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left[\frac{2+x}{2-x}\right]^4} + C$$

Volver
Índice

6.4. Integrales irracionales de polinomios de grado dos no completos

En este apartado vamos a considerar el caso particular en que sólo aparezca una raíz cuadrada afectando únicamente a polinomios de grado 2 sin término de grado uno.

Veremos este caso en tres posibilidades, según el signo que posean los dos términos del polinomio de grado 2 que está afectado por la raíz cuadrada.

a) Supongamos, en primer lugar, que el signo del término de grado 2 es negativo y el de la constante, positivo. Esta situación se puede expresar como:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - a^2x^2}} \qquad \text{o} \qquad I_2 = \int \sqrt{b^2 - a^2x^2}\,dx$$

según la raíz aparezca multiplicando o dividiendo. En cualquiera de las dos posibilidades el cambio de variable que nos permite pasar a una integral de alguno de los tipos vistos hasta ahora, es decir, sin raíces en ella, es de la forma:

$$ax = b\,\text{sen}\,t$$

de donde se deduce que

$$dx = \frac{b}{a}\cos t\,dt$$

Aplicando este cambio de variable a las dos posibilidades, llegamos a que:

$$I_1 = \int \frac{(b/a)\cos t}{\sqrt{b^2 - b^2\text{sen}^2 t}}\,\text{dt} = \frac{1}{a}\int \frac{\cos t}{\cos t}\,dt = \frac{1}{a}\int dt =$$

$$= \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a}\,\text{arcsen}\left(\frac{ax}{b}\right) + C$$

$$I_2 = \int \sqrt{b^2 - b^2\text{sen}^2 t}\,\frac{b}{a}\cos t\,dt = \frac{b^2}{a}\int \cos^2 t\,dt = \frac{b^2}{a}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{b^2}{2a}\left(t + \frac{\text{sen}\,2t}{2}\right) + C = \frac{b^2}{2a}\,\text{arcsen}\left(\frac{ax}{b}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{b^2 - a^2x^2} + C$$

$$\left(\text{sen}\,2t = 2\,\text{sen}\,t\cos t = \frac{2ax}{b^2}\sqrt{b^2 - a^2x^2}\right)$$

Notemos que idénticos resultados se hubieran obtenido cambiando el papel de la función sen*t* por cos*t*, es decir, realizando el cambio de variable:

$a\,x = b\cos t$, con lo que $a\,dx = -\,b\,\text{sen}\,t\,dt$

b) En segundo lugar, consideremos el caso en que el signo del término de grado 2 sea positivo y el de la constante, negativo, en cualquiera de las dos posibilidades análogas al caso anterior, es decir:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2 - b^2}} \qquad \text{o} \qquad I_2 = \int \sqrt{a^2x^2 - b^2}\ dx$$

Con un razonamiento similar al del caso anterior, el cambio de variable que aplicaremos aquí es:

$$ax = \frac{b}{\text{sen}t}$$

de donde:

$$dx = \frac{-b\cos t}{a\,\text{sen}^2 t}dt$$

Aplicando este cambio de variable a ambas integrales, llegamos a que:

$$I_1 = \int \frac{-b\cos t / a\,\text{sen}^2 t}{\sqrt{\left(b^2/\text{sen}^2 t\right) - b^2}}\,dt = -\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\text{sen}t}$$

que resulta ser una integral racional de funciones trigonométricas, tratada en el capítulo 5.

$$I_2 = \int \sqrt{\left(b^2/\text{sen}^2 t\right) - b^2}\ \left(-b\cos t / a\,\text{sen}^2 t\right)\,dt = -\frac{b^2}{a}\int \frac{\cos^2 t}{\text{sen}^3 t}\ dt$$

que de nuevo tiene la forma vista en el capítulo 5.
También en esta situación se puede considerar como cambio de variable:

$$ax = \frac{b}{\cos t}$$

obteniéndose resultados totalmente análogos.

c) Por último, veamos el caso en que el signo de los dos términos del polinomio sean positivos, es decir:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2 + b^2}} \qquad \text{o} \qquad I_2 = \int \sqrt{a^2x^2 + b^2}\ dx$$

En esta situación, el cambio de variable orientado a conseguir el mismo efecto que en los casos anteriores será:

$$ax = b\,\mathrm{tg}\,t$$

que, diferenciando, da lugar a:

$$a\,dx = b\left(1 + \mathrm{tg}^2 t\right)dt = \frac{b}{\cos^2 t}\,dt$$

Este cambio de variable aplicado a las dos formas en que puede aparecer la integral resulta en:

$$I_1 = \int \frac{b/a\cos^2 t}{\sqrt{b^2\mathrm{tg}^2 t + b^2}}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\cos t}$$

$$I_2 = \int \sqrt{b^2\mathrm{tg}^2 t + b^2}\,\frac{b}{a\cos^2 t}\,dt = \frac{b^2}{a}\int \frac{dt}{\cos^3 t}$$

En cualquiera de los dos casos, de nuevo llegamos a una integral de las estudiadas en el capítulo 5.

Nota

Los cambios de variable que hemos visto no son los únicos posibles para realizar en estas situaciones. Cambios análogos utilizando las funciones hiperbólicas nos llevarían a situaciones similares. También pueden aplicarse los conocidos como cambios de Euler, que consiguen llegar a la integral de una función sin raíces en ella.

Ejemplos

Volver caso a)

1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8 - 5x^2}} = \{\sqrt{5}\,x = \sqrt{8}\,\mathrm{sen}\,t \;\Rightarrow\; \sqrt{5}\,dx = \sqrt{8}\cos t\,dt\} =$

$$= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}\int \frac{\cos t}{\sqrt{8}\cos t}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,t + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arcsen}\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\,x\right) + C$$

En este ejemplo hemos aplicado el cambio visto en a), debido a que el signo del coeficiente de grado 2 es negativo y el de la constante positivo.

2) $I = \int \sqrt{9-(5-x)^2}\ dx = \{\ 5-x = 3\text{sen}t \ \Rightarrow\ -dx = 3\cos t\, dt\ \} =$

$$= -\int \sqrt{9-9\text{sen}^2 t}\ 3\cos t\ dt = -9\int \cos^2 t\ dt = -\frac{9}{2}\int (1+\cos 2t)\ dt =$$

$$= -\frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\text{sen}2t + C$$

Como se tiene que $\text{sen}2t = 2\text{sen}t\cos t = 2\frac{5-x}{3}\frac{1}{3}\sqrt{9-(5-x)^2}$

$$I = -\frac{9}{2}\,\text{arcsen}\left(\frac{5-x}{3}\right) - \frac{9}{4}\ 2\ \frac{5-x}{9}\sqrt{9-(5-x)^2} + C =$$

$$= -\frac{9}{2}\,\text{arcsen}\left(\frac{5-x}{3}\right) - \frac{5-x}{2}\sqrt{9-(5-x)^2} + C$$

Notemos aquí que el polinomio que aparece dentro de la raíz está agrupado para que no aparezca el término de grado 1, que es la hipótesis que estamos barajando en este caso. Tal situación se generalizará en el siguiente apartado. Por lo demás, el cambio de variables elegido ha sido el propuesto en el caso a) de nuevo.

Volver caso b)

3) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{7(9-x)^2-16}}$

Al igual que en el ejemplo anterior, el polinomio de grado 2 que está afectado por la raíz ya se encuentra agrupado, asociándose a la situación propuesta en el caso b), donde el coeficiente del término de grado 2 es positivo y la constante, negativa. Por lo tanto, el cambio de variable a realizar es:

$$\sqrt{7}(9-x)=\frac{4}{\operatorname{sen} t} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{7}\, dx=-\frac{4\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

con lo que obtenemos:

$$I=\frac{4}{\sqrt{7}}\int\frac{\cos t/\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{\left(16/\operatorname{sen}^2 t\right)-16}}\,\mathrm{dt}=\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{dt}{\operatorname{sen} t}$$

Esta integral resulta ser del tipo estudiado en el capítulo 5. La función trigonométrica que aparece es impar en la variable sen*t*, por lo que realizamos un nuevo cambio de variable de la forma:

$$\cos t=u \Rightarrow \operatorname{sen} t=\sqrt{1-u^2} \quad , \quad dt=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Con este nuevo cambio se tiene que:

$$I=-\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{du}{1-u^2}$$

Ahora, la función a integrar resulta ser una función racional de las estudiadas en el capítulo 4. Como los ceros del denominador son reales simples, aplicaremos el método de descomposición de fracciones simples. Una vez calculadas las constantes indeterminadas, obtenemos que:

$$I=-\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{1/2}{1-u}\,du-\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{1/2}{1+u}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{Log}\left|1-u\right|-\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{Log}\left|1+u\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{Log}\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{Log}\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|+C=$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{Log}\left| \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{16}{7(9-x)^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{16}{7(9-x)^2}}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{Log}\left| \frac{\sqrt{7}(9-x) - \sqrt{7(9-x)^2 - 16}}{\sqrt{7}(9-x) + \sqrt{7(9-x)^2 - 16}} \right| + C$$

Este resultado puede simplificarse si racionalizamos dentro del Logaritmo, quedando:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{Log}\left| \frac{\left(\sqrt{7}(9-x) - \sqrt{7(9-x)^2 - 16}\right)^2}{16} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{Log}\left| \sqrt{7}(9-x) - \sqrt{7(9-x)^2 - 16} \right| + C$$

En la última expresión hemos aplicado propiedades de la función Logaritmo y hemos agrupado la constante de integración C con el valor constante del Logaritmo del denominador.

Volver Índice

6.5. Integrales irracionales de polinomios de grado dos completos

En este apartado vamos a considerar el caso más general, en el que los polinomios de grado dos que aparecen en la función a integrar afectados por una raíz cuadrada sean completos, es decir, posean término de grado uno distinto de cero. El proceso a realizar aquí será transformar la función a integrar en una del tipo estudiado en el apartado anterior, a través de algún cambio de variable.

La situación ahora será, pues, calcular integrales de funciones de la forma:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad \text{o} \qquad I_2 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\; dx$$

donde a,b,c son números reales.

El objetivo es pasar del polinomio completo de segundo grado a otro de grado dos sin término de grado uno. Para conseguir este propósito, reorganizamos el polinomio original completando cuadrados, en forma de suma o diferencia de cuadrados, de la siguiente manera:

$$ax^2+bx+c = \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \quad , \qquad \text{si } a > 0$$

Si $a < 0$, basta sacar factor común -1, para pasar a un polinomio donde el coeficiente director es positivo y aplicar la descomposición anterior. Es decir, $ax^2+bx+c = -\left(-ax^2-bx-c\right)$, donde $-a > 0$, y este último polinomio lo expresamos como:

$$-ax^2-bx-c = \left(\sqrt{-a}\,x - \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 + \frac{b^2-4ac}{4a}$$

en definitiva, se obtiene para $a < 0$:

$$ax^2+bx+c = -\left(\sqrt{-a}\,x - \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

En el primer caso, basta realizar el cambio de variable:

$$\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{a}}$$

y, en el segundo, el análogo:

$$\sqrt{-a}\,x - \frac{b}{2\sqrt{-a}} = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{-a}}$$

para llegar a una integral de las estudiadas en el apartado anterior. Resumiendo, si llamamos $k^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, obtenemos alguna de las siguientes integrales, al realizar los cambio de variable señalados para cada caso. Obsérvese que omitimos las constantes que aparecerán multiplicando o dividiendo y que saldrían fuera de la integral por la propiedad de linealidad de la misma.

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} \quad , \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - k^2}} \quad , \quad \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 + t^2}}$$

$$\int \sqrt{k^2 - t^2}\, dt \quad , \quad \int \sqrt{t^2 - k^2}\, dt \quad , \quad \int \sqrt{k^2 + t^2}\, dt$$

que corresponden a alguno de los casos estudiados en el apartado anterior.

Ejemplos

1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x - 35}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x^2 - x - \frac{35}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 9}} =$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x - (1/2)}{3}\right)^2 - 1}}$$

Ahora, realizamos el cambio de variable $\dfrac{x - 1/2}{3} = t \Rightarrow dx = 3dt$, con lo cual la integral I queda:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

donde el término de grado uno ha desaparecido al completar los cuadrados. Esta nueva integral es del tipo estudiado en el apartado anterior. Como vimos allí, el

cambio de variable a efectuar ahora es: $t = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u} \Rightarrow dt = \dfrac{-\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}\, du$, con lo que llegamos a que:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{-\cos u / \operatorname{sen}^2 u}{\sqrt{\left(1/\operatorname{sen}^2 u\right) - 1}}\, du = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos u / \operatorname{sen}^2 u}{\cos u / \operatorname{sen} u}\, du = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\operatorname{sen} u}$$

queda de la forma estudiada en el capítulo 5, como función racional de funciones trigonométricas. Como dicha función es impar en la expresión sen$u$, el cambio de variable a realizar ahora será de la forma cos$u$ = z, y, por tanto, $sen\, u = \sqrt{1 - z^2}$, y $du = -\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, con lo que I se transforma en:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1-z}\, dz + \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+z}\, dz = -\frac{1}{4}\operatorname{Log}|1-z| + \frac{1}{4}\operatorname{Log}|1+z| + C$$

Nótese que la integral a la que se llega, una vez realizado este último cambio de variable, se reduce a una función racional, cociente de polinomios, estudiada en el capítulo 4. Aplicado el método de descomposición de fracciones simples, se obtiene de manera sencilla el resultado mostrado.

Por último, es necesario deshacer todos los cambios de variable efectuados durante el proceso, hasta dejar el resultado en función de la variable original x.

$$I = \frac{1}{4}\operatorname{Log}\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = \frac{1}{4}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\cos u}{1-\cos u}\right| + C = \frac{1}{4}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}}{1-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{1-1/t^2}}{1-\sqrt{1-1/t^2}}\right| + C = \frac{1}{4}\operatorname{Log}\left|\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-\sqrt{t^2-1}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\frac{x-1/2}{3} + \sqrt{\left(\frac{x-1/2}{3}\right)^2 - 1}\right| + C =$$

$$=\frac{1}{2}\text{Log}\left|\frac{2x-1}{6}+\sqrt{\left(\frac{2x-1}{6}\right)^2-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\text{Log}\left|\frac{2x-1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{4x^2-4x-35}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\text{Log}\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x-35}\right|+C$$

2) $I = \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+\frac{5}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{3}{2}}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3/2}}\right)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}(x+1)\right)^2+1}}$$

Realizamos el cambio de variable $\sqrt{\frac{2}{3}}\,(x+1)=t\Rightarrow dx=\sqrt{\frac{3}{2}}\,dt$, con el que:

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1+\text{tg}^2u}{\sqrt{1+\text{tg}^2u}}\,du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\cos u}$$

Una vez realizado el cambio de variable, $t=\text{tg}u\Rightarrow dt=\left(1+\text{tg}^2u\right)du$. De nuevo llegamos a una función racional de funciones trigonométricas, que resulta ser impar en el término $\cos u$, por lo que realizamos un nuevo cambio de variable de la forma: $\text{sen}u=z\Rightarrow\cos u=\sqrt{1-z^2}$, y $du=\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{1-z^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1/2}{1-z}\,dz+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1/2}{1+z}\,dz=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+C$$

Por último, deshacemos todos los cambios de variables, obteniendo:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\operatorname{sen}u}{1-\operatorname{sen}u}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{1-\cos^2 u}}{1-\sqrt{1-\cos^2 u}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{1-\left(1/1+t^2\right)}}{1-\sqrt{1-\left(1/1+t^2\right)}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\sqrt{1+t^2}+t\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\sqrt{\frac{2}{3}}(x+1)+\sqrt{1+\frac{2}{3}(x+1)^2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\sqrt{\frac{2}{3}}(x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2x^2+4x+5}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\sqrt{2}(x+1)+\sqrt{2x^2+4x+5}\right|+C$$

3) $$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-2x^2+x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{9}{16}-\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2}}=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4x-1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arcsen}\left(\frac{4x-1}{3}\right)+C$$

4) $I = \int\sqrt{27-18x+9x^2}\;dx = 3\int\sqrt{x^2-2x+3}\,dx = 3\int\sqrt{(x-1)^2+2}\;dx =$

$$= 3\sqrt{2}\int\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\;dx$$

Hacemos el cambio de variable $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = t \Rightarrow dx = \sqrt{2}\;dt$, con lo que:

$$I = 6\int\sqrt{t^2+1}\;dt = 6\int\sqrt{1+\text{tg}^2 u}\,\left(1+\text{tg}^2 u\right)du = 6\int\frac{du}{\cos^3 u}$$

una vez realizado un nuevo cambio de variable de la forma: t = tg$u$.

La función a integrar a la que se llega es racional de funciones trigonométricas, impar en el término cos$u$, por lo que el cambio de variable a realizar ahora será: $\text{sen}u = z \Rightarrow \cos u = \sqrt{1-z^2}$, y $du = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$. De esta manera $I = 6\int\frac{dz}{\left(1-z^2\right)^2}$, que resulta en un cociente de polinomios, al que, según el capítulo 4, podemos aplicar el método de descomposición en fracciones simples, resultando:

$$\frac{6}{\left(1-z^2\right)^2} = \frac{A}{1-z}+\frac{B}{(1-z)^2}+\frac{C}{1+z}+\frac{D}{(1+z)^2}$$

Colocando denominador común y resolviendo el sistema lineal que nos proporciona el valor de las constantes indeterminadas, éstas toman los siguientes valores:

$$A = B = C = D = \frac{3}{2}$$

Llevando estos valores a la integral y aplicando la linealidad de la misma, se tiene que:

$$I = \frac{3}{2}\int\frac{dz}{1-z} + \frac{3}{2}\int\frac{dz}{(1-z)^2} + \frac{3}{2}\int\frac{dz}{1+z} + \frac{3}{2}\int\frac{dz}{(1+z)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\text{Log}\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + \frac{3}{2}\frac{1}{1-z} - \frac{3}{2}\frac{1}{1+z} + C = \frac{3}{2}\text{Log}\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + \frac{3z}{1-z^2} + C$$

Finalmente, deshacemos todos los cambio de variables realizados durante el proceso de integración para dar el resultado final en términos de la variable original x.

$$I = \frac{3}{2}\text{Log}\left|\frac{1+\text{sen}u}{1-\text{sen}u}\right| + \frac{3\text{sen}u}{1-\text{sen}u^2} + C = \frac{3}{2}\text{Log}\left|\frac{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}\right| + \frac{3\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\frac{t^2}{1+t^2}} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\text{Log}\left|\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t}\right| + 3t\sqrt{1+t^2} + C = 3\text{Log}\left|\sqrt{1+t^2}+t\right| + 3t\sqrt{1+t^2} + C =$$

$$= 3\text{Log}\left|\sqrt{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{x-1}{\sqrt{2}}\right| + 3\frac{x-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2} + C =$$

$$= 3\text{Log}\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right| + 3\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+3} + C$$

Volver
Índice

6.6. Integrales irracionales compuestas

Veremos en este apartado algunas integrales de funciones compuestas por la raíz cuadrada de un polinomio completo de grado dos, acompañada de algún

otro polinomio colocado en la función de manera particular. En concreto, vamos a estudiar dos casos particulares:

a) $I = \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

donde a,b,c son números reales y $P(x)$ es un polinomio de grado cualquiera. El objetivo es encontrar una descomposición de esta función a través de la cual el problema se reduzca a calcular la integral de alguna función estudiada anteriormente. En este caso, utilizaremos la siguiente relación cuya demostración omitimos:

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left(Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' + \frac{m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde $Q(x)$ es un polinomio de coeficientes indeterminados de grado conocido como *grado* $Q(x)$ = *grado* $P(x) - 1$, y m es un número real constante también a determinar. Los coeficientes indeterminados de $Q(x)$ y el valor de m se determinarán a través de los métodos de coeficientes indeterminados que se vieron para el caso de la descomposición de funciones racionales.

Ejemplo

$$I = \int \frac{x^2-3x+7}{\sqrt{2x^2+4x+5}}\,dx$$

$$\frac{x^2-3x+7}{\sqrt{2x^2+4x+5}} = \left[(ax+b)\sqrt{2x^2+4x+5}\right]' + \frac{m}{\sqrt{2x^2+4x+5}} =$$

$$= a\sqrt{2x^2+4x+5} + \frac{(ax+b)(2x+2)}{\sqrt{2x^2+4x+5}} + \frac{m}{\sqrt{2x^2+4x+5}}$$

Colocando denominador común e igualando los numeradores que resultan, llegamos a que:

$$x^2 - 3x + 7 = 2ax^2 + 4ax + 5a + 2ax^2 + 2ax + 2bx + 2b + m$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, obtenemos el siguiente sistema lineal, que nos dará el valor de las constantes indeterminadas:

$$\begin{array}{ll} x^2: & 1 = 4a \\ x: & -3 = 6a + 2b \\ 1: & 7 = 5a + 2b + m \end{array}$$

cuya solución única resulta ser: $a = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{-9}{4}$, $m = \dfrac{41}{4}$

Por tanto, tenemos:

$$I = \frac{x-9}{4}\sqrt{2x^2+4x+5} + \frac{41}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}}$$

Llegamos así a una integral del tipo estudiado en el apartado anterior:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} = \left\{ \frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = t \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{3}{2}}dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Log}\left|\sqrt{1+t^2}+t\right| + C$$

Notamos que este resultado se obtuvo en el ejemplo 2 del apartado anterior. Por tanto,

$$I=\frac{x-9}{4}\sqrt{2x^2+4x+5}+\frac{41}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{Log}\left|\sqrt{\frac{2}{3}}(x+1)+\sqrt{1+\frac{2}{3}(x+1)^2}\right|+C=$$

$$=\frac{x-9}{4}\sqrt{2x^2+4x+5}+\frac{41}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{Log}\left|\sqrt{2}(x+1)+\sqrt{2x^2+4x+5}\right|+C$$

b) En este caso, vamos a estudiar integrales de la forma

$$I=\int\frac{dx}{(Ax+B)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

con A,B,a,b,c números reales y n natural. En esta situación, el cambio de variables que aplicaremos para conducir la integral original o bien a una del caso a) que acabamos de ver, o bien a una de las estudiadas en el apartado anterior, es de la forma:

$$AX+B=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=\frac{1}{A}\frac{-dt}{t^2}$$

Ejemplo

$$I=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+3x-1}}$$

Identificando esta función a integrar con la función general dada, obtenemos que $A = 1$, $B = 0$, $n = 3$, por lo que el cambio de variable a realizar queda de la forma: $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$, y así

$$I=\int\frac{\frac{-dt}{t^2}t^3}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}-1}}=-\int\frac{t^2}{\sqrt{-t^2+3t+1}}\,\mathrm{dt},$$ que se clasifica en el tipo de integrales estudiadas en el caso a) anterior. Procedemos a su descomposición:

$$\frac{t^2}{\sqrt{-t^2+3t+1}} = \frac{d}{dt}\left[(at+b)\sqrt{-t^2+3t+1}\right] + \frac{m}{\sqrt{-t^2+3t+1}}$$

$$\frac{t^2}{\sqrt{-t^2+3t+1}} = a\sqrt{-t^2+3t+1} + (at+b)\frac{-2t+3}{2\sqrt{-t^2+3t+1}} + \frac{m}{\sqrt{-t^2+3t+1}}$$

$$2t^2 = 2a\left(-t^2+3t+1\right) + (at+b)(-2t+3) + 2m$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado:

t^2:	$2 = -4a$
t:	$0 = 9a - 2b$
1:	$0 = 2a + 3b + 2m$

cuya solución única es:

$$a = \frac{-1}{2}\ ,\ \mathrm{b} = \frac{-9}{4}\ ,\ m = \frac{31}{8}$$

con lo cual:

$$I = \left(\frac{2t+9}{4}\right)\sqrt{-t^2+3t+1} - \frac{31}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{-t^2+3t+1}}$$

$$I_1 = \int\frac{dt}{\sqrt{\frac{13}{4}-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\int\frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{2t-1}{\sqrt{13}}\right)^2}} = \mathrm{arcsen}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{13}}\right) + C$$

Con lo cual, tenemos que:

$$I = \left(\frac{2t+9}{4}\right)\sqrt{-t^2+3t+1} - \frac{31}{8}\mathrm{arcsen}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{13}}\right) + C$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable, llegamos a que:

$$I = \left(\frac{9x+2}{4x}\right)\sqrt{\frac{-1}{x^2}+\frac{3}{x}+1} - \frac{31}{8}\,\text{arcsen}\left(\frac{2-3x}{\sqrt{13}x}\right)+C =$$

$$= \left(\frac{9x+2}{4x}\right)\frac{\sqrt{x^2+3x-1}}{x} - \frac{31}{8}\,\text{arcsen}\left(\frac{2-3x}{\sqrt{13}x}\right)+C$$

Volver
Índice

Ejercicios propuestos

1) $\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx = \text{Log}\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right| + \sqrt{x(x+1)} + C$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = 2\text{Log}\left|1-\sqrt{1-x}\right| - \text{Log}|x| + C$

3) $\int \frac{1+3\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt{x-2}}\,dx = 6\sqrt{x-2}+12\sqrt[3]{x-2}+$

$$+24\sqrt[6]{x-2}+24\text{Log}\left|\sqrt[6]{x-2}-1\right|+C$$

4) $\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}} = 2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+4\text{Log}\left|\sqrt[4]{x}-1\right|+C$

5) $\int \frac{dx}{(5-x)\sqrt{3-x}} = -\sqrt{2}\,\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{3-x}{2}}\right)+C$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right| + C$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}} = 2\sqrt{x+1} - 4\sqrt[4]{x+1} + 4\operatorname{Log}\left(1+\sqrt[4]{x+1}\right) + C$

8) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}\,dx = -x + \frac{4}{3}\sqrt{3x+2} - \frac{4}{3}\operatorname{Log}\left(1+\sqrt{3x+2}\right) + C$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = 1 + \sqrt[4]{(2x-1)^2} + 2\operatorname{Log}\left|\sqrt[4]{2x-1}-1\right| + C$

10) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = -\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)\sqrt{2x-x^2} + \frac{3}{2}\operatorname{arcsen}(x-1) + C$

11) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+4}\;dx = \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}\right)\sqrt{x^2+4} - 2\operatorname{Log}\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C$

12) $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left(\frac{x^4}{5}-\frac{4x^2}{15}-\frac{8}{15}\right)\sqrt{1-x^2} + C$

13) $\displaystyle\int \sqrt{9+10x-7x^2}\;dx = \frac{7x-5}{14}\sqrt{9+10x-7x^2} +$

$$+\frac{44}{7\sqrt{7}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{7x-5}{2\sqrt{22}}\right) + C$$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{x-2}\right) + C$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}} = \mathrm{Log}\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-2}\right| + C$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+2x+1}} = \frac{1}{2}\mathrm{arcsen}\left(\frac{8x-2}{\sqrt{20}}\right) + C$

18) $\displaystyle\int \sqrt{2x^2+x+10}\ dx = \frac{4x+1}{8}\sqrt{2x^2+x+10} +$

$$+\frac{79\sqrt{2}}{32}\mathrm{Log}\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+5}\right| + C$$

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arcsen}\left(\frac{4x-3}{5}\right) + C$

20) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \mathrm{arcsen}(2x-1) + C$

21) $\displaystyle\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx = -2\sqrt{1-x-x^2} - 9\mathrm{arcsen}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C$

22) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\ dx = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1} +$

$$+\frac{\sqrt{5}}{25}\mathrm{Log}\left|x-\frac{1}{5}+\sqrt{x^2-\frac{2x}{5}+\frac{1}{5}}\right| + C$$

23) $\displaystyle\int \frac{-4x+10}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\ dx = 4\sqrt{-x^2+4x-3} + 2\mathrm{arcsen}(x-2) + C$

24) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\text{Log}\left|\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$

25) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}} = -\text{arcsen}\left(\frac{x+2}{x\sqrt{5}}\right) + C$

26) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = -\text{arcsen}\left(\frac{1}{x+1}\right) + C$

27) $\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^4}}\ dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{x^2+1} - 1} + C$

28) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}\ dx = \sqrt{x^2+4x+1} + C$

29) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Log}\left|\frac{2}{x+1} - 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{x+1} - 1\right)^2}\right| + C$

30) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}} = -\text{Log}\left|\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}\right| + C$

31) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$

32) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \text{Log}\left|\frac{x-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}\right| + C$

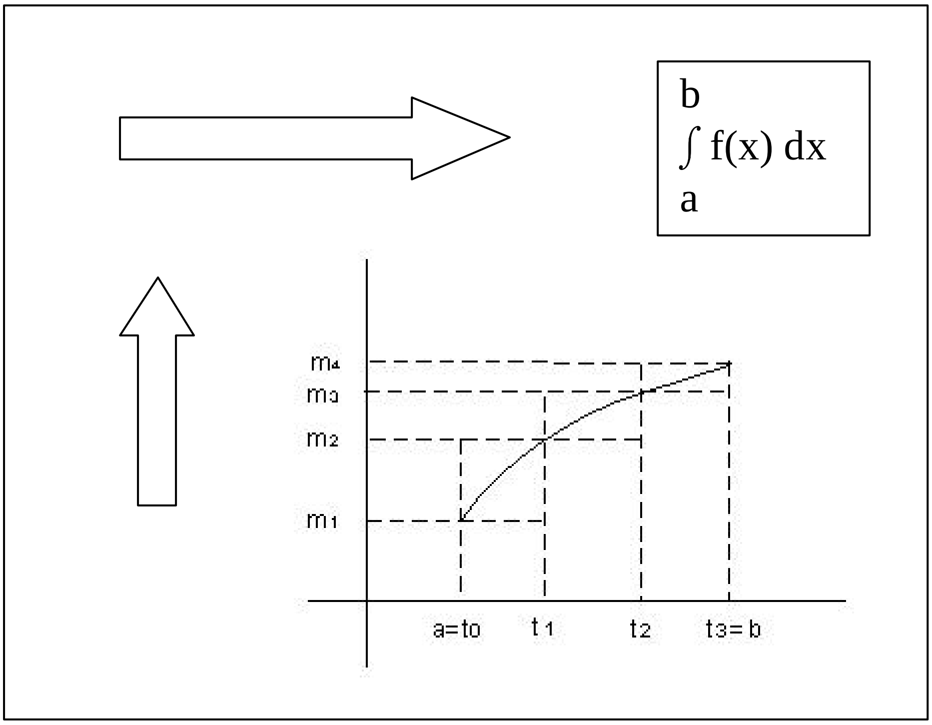
33) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{27+6x-x^2}}\,dx = -\sqrt{27+6x-x^2} + 3\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-3}{6}\right) + C$

34) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|2x+1+\sqrt{(2x+1)^2+1}\right| + C$

35) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x+1}\right) + C$

Volver
Índice

Capítulo 7
Integral definida



Capítulo 7
Integral definida

7.1. Introducción

Si $y = f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a,b]$ y el límite de la suma de Riemann existe, entonces decimos que $f(x)$ es una función integrable en $[a,b]$ y denotamos ese límite mediante:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Llamamos *integral definida* de la función $y = f(x)$ entre a y b a este límite. Al número a se le llama *límite inferior de integración* y al número b, *límite superior de integración*.

7.2. Teorema de integrabilidad

Volver
Índice

Si $y = f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es integrable en $[a,b]$. Además, el valor de la integral definida es un número real.

7.3. El área como una integral definida

Si $y = f(x)$ es una función continua y no negativa en el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ $\Rightarrow$ el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, el eje OX, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ viene dada por el número real:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

7.4. Propiedades

1) Si $y = f(x)$ está definida en $x = a$ $\quad\Rightarrow\quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) Si $y = f(x)$ es integrable en $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) Si $y = f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y $c \in (a,b)$ con $y = f(x)$ integrable en $[a,c]$ y $[c,b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4) Si $y = f(x)$, $y = g(x)$ son integrables en $[a,b]$ y k es una constante real $\Rightarrow$

$$\int_a^b k\, f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

5) Propiedad de *monotonía* de la integral:
Si $y = f(x)$, $y = g(x)$ son funciones integrables en $[a,b]$ tales que cumplen que $f(x) \le g(x)$ $\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Volver
Índice

7.5. Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Hay una estrecha relación entre el cálculo diferencial y el cálculo integral. Esta relación fue descubierta, independientemente, por Newton y Leibniz, y por esta razón se les atribuye a ambos el descubrimiento del cálculo integral.

Teorema

Si una función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde $F(x)$ es cualquier función tal que $F'(x) = f(x)$ $\forall\, x \in [a,b]$.

Este resultado se conoce también como *Regla de Barrow.*

Ejemplos

1) $\int_1^2 \left(x^2-3\right)dx = \left[\dfrac{x^3}{3}-3x\right]_1^2 = \dfrac{8}{3} - 6 - \dfrac{1}{3} + 3 = -\dfrac{2}{3}$

2) $\int_0^1 (4x+1)^2\,dx = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{(4x+1)^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{125}{3}-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{4}\dfrac{124}{3} = \dfrac{31}{3}$

3) $\int_0^{\pi/8} \sec^2 2x\; dx = \dfrac{1}{2}\left[\text{tg}\,2x\right]_0^{\pi/8} = \dfrac{1}{2}(1-0) = \dfrac{1}{2}$

4) Evaluar: $\int_0^2 |\,2x-1\,|\,dx$

Hay que tener en cuenta que $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & si \quad x \geq 1/2 \\ 1-2x & si \quad x < 1/2 \end{cases}$

$$\int_0^2 |\,2x-1\,|\,dx = \int_0^{1/2} (1-2x)\,dx + \int_{1/2}^2 (2x-1)\,dx =$$
$$= \left[-x^2+x\right]_0^{1/2} + \left[x^2-x\right]_{1/2}^2 =$$
$$= \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) + (4-2) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

5) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de ecuación $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje OX y las rectas verticales $x = 0$, $x = 2$.

$$\text{Área} = \int_0^2 \left(2x^2-3x+2\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^2 = \frac{16}{3} - \frac{12}{2} + 4 = \frac{10}{3}$$

Volver Índice

7.6. Cambios de variable para integrales definidas

Si la función $u = g(x)$ tiene derivada continua en $[a,b]$ y existe la integral indefinida sobre el recorrido de $g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

donde el cambio de variable afecta también a los límites de integración, que tomarán ahora valores en la nueva variable de integración.

Ejemplos

1) Calcular: $I = \int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3 dx$

   Si realizamos el cambio de variable $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x\, dx$
   Esto nos lleva a cambiar también los valores de los límites de integración de la siguiente manera:

   si $x = 1 \Rightarrow u = 2$
   si $x = 0$ Þ $u = 1$

   Por tanto, al realizar este cambio de variable, llegamos a:

$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 u^3 du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

2) Evaluar: $I = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx$

   Realizamos el cambio de variable: $u^2 = 2x - 1 \Rightarrow 2u\, du = 2dx$

   Despejando, $x = \dfrac{u^2+1}{2}$

   Cambiamos los índices de integración:

   si $x = 5 \Rightarrow u = 3$
   si $x = 1 \Rightarrow u = 1$

   Por tanto,

$$I = \int_1^3 \frac{\left(u^2+1\right)/2}{u}\; u\, du = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(u^2+1\right) du =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}+u\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[9+3-\frac{1}{3}-1\right]=\frac{16}{3}$$

3) Calcular: $I=\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\; dx$

Cambio de variable: $x = r\,\text{sen}t \Rightarrow dx = r\cos t\, dt$
Cambio de límites de integración:

$$\text{si} \qquad x=r \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$
$$\text{si} \qquad x=0 \Rightarrow t=0$$

Así,

$$I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\text{sen}t}\,\cos t\,dt = r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\; dt = \frac{r^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$=\frac{r^2}{2}\left[t+\frac{\text{sen}\,2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi r^2}{4}$$

Volver
Índice

Ejercicios propuestos

1) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + x - 3\right) dx = \frac{5}{6}$

2) $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{x-2}\ dx = \frac{2}{3}$

3) $\displaystyle\int_0^1 x\, e^{x^2-1} dx = \frac{e-1}{2e}$

4) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{tg} x\, dx = 0$

5) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}$

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}\, dx = \frac{\pi}{16}$

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\, dx = \mathrm{Log}\left(\frac{9}{8}\right)$

8) $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{Log}\left(x^2+1\right) dx = \mathrm{Log}\left(\frac{25}{2}\right) - 2 + 2\,\mathrm{arctg} 2 - \frac{\pi}{2}$

9) $\displaystyle\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx = \frac{100}{3}$

10) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \mathrm{Log}\left(\frac{4}{3}\right)$

11) $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{sen}(\mathrm{Log}x)}{x}\,dx = 1-\cos 1$

12) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

13) $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \pi$

14) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4-\mathrm{sen}^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

15) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 4-2\mathrm{Log}(3)$

16) $\displaystyle\int_0^{\mathrm{Log}(5)} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = 4-\pi$

17) $\displaystyle\int_0^{\mathrm{Log}(2)} \sqrt{e^x-1}\,dx = 2-\frac{\pi}{2}$

18) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$

19) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = 1-\frac{\pi}{4}$

20) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = \mathrm{Log}\left(\frac{7+2\sqrt{7}}{9}\right)$

21) $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}} = \frac{1}{5}\mathrm{Log}(112)$

22) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{7}+1\right)}{9}\right)$

23) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

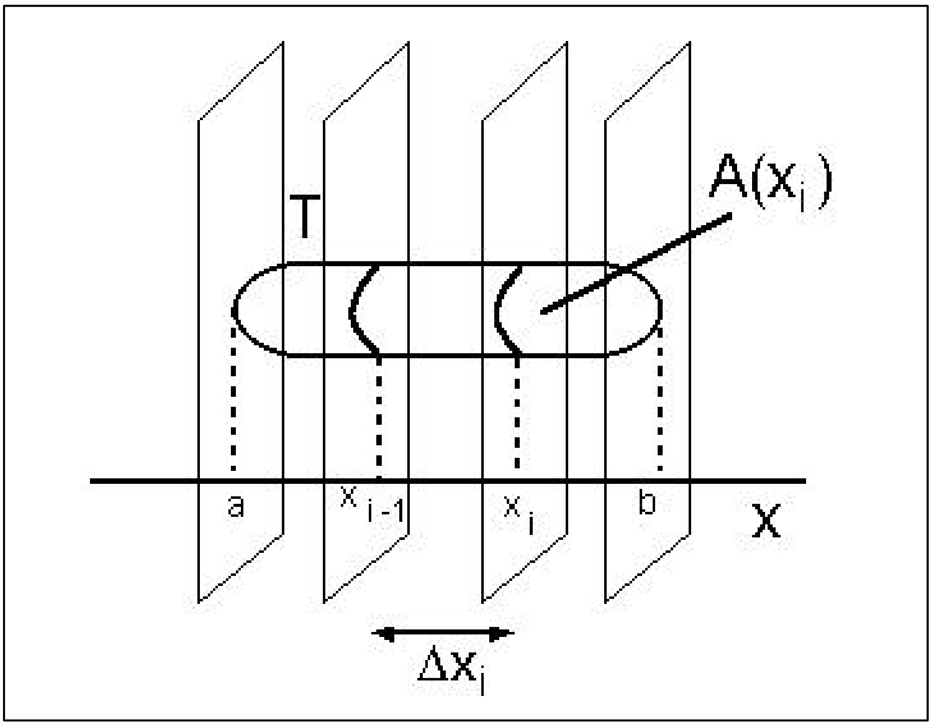
24) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} = \frac{\pi}{2}$

25) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\mathrm{sen}\,x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

26) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos 3x \;\; \mathrm{sen}\,6x \; dx = \frac{4}{9}$

Volver
Índice

Capítulo 8
Aplicaciones geométricas y mecánicas de la integral definida



Capítulo 8
Aplicaciones geométricas y mecánicas de la integral definida

Volver Índice

8.1. Cálculo de áreas en coordenadas cartesianas

En esta sección vamos a tratar de calcular el área de figuras planas limitadas por funciones continuas expresadas en coordenadas cartesianas a través del cálculo de ciertas integrales definidas. Distinguiremos varios casos, de menor a mayor complejidad, hasta llegar a la situación más general.

a) Si la función $y = f(x)$ está definida y es continua en el intervalo $[a,b]$, verificando que $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$, entonces, como ya sabemos, el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ es igual a:

$$\mathrm{A} = \int_a^b f(x)\,dx$$

b) Si la función $y = f(x)$ está definida y es continua en el intervalo $[a,b]$, verificando que $f(x) \leq 0\ \forall x \in [a,b]$, entonces el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ es igual a:

$$\mathrm{A} = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Notemos que en esta situación, debido a que $f(x)$ es no positiva en el intervalo de integración, el valor del área es no negativo, por la propiedad de monotonía de la integral.

c) Si $y = f(x)$ está definida y es continua en el intervalo $[a,b]$ y cambia de signo un número finito de veces en el segmento $[a,b]$, entonces podemos descomponer la integral a lo largo del intervalo $[a,b]$ en suma de integrales a lo largo de tantos subintervalos como sea necesario para asegurar que en cada uno de ellos la función permanece con signo constante. El valor de la integral

definida será positiva en los subintervalos donde $f(x) \geq 0$, y negativa en aquellos donde $f(x) \leq 0$. Así, el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ se calculará como suma de integrales definidas de la forma vista en los casos anteriores a) o b), según el signo constante que posea la función en cada subintervalo concreto. Esta situación puede resumirse en la siguiente fórmula general, que engloba a los casos anteriores como particulares:

$$\mathrm{A} = \int_a^b \left| f(x) \right| dx$$

d) Si se desea calcular el área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, continuas en el intervalo $[a,b]$, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, primero se calcularán todos los puntos en que se cortan las dos funciones $f(x)$, $g(x)$ dentro del intervalo $[a,b]$. Entonces, en cada uno de los subintervalos determinados por esos puntos de intersección se comprueba qué gráfica se encuentra por encima de la otra y se aplica en cada uno de ellos la fórmula:

$$\mathrm{A} = \int_i^j \left(\text{curva que va por arriba} - \text{curva que va por debajo}\right) dx$$

Este caso es el más general, y todos los anteriores se pueden ver como situaciones particulares de él. La fórmula, escrita en términos de las funciones, quedaría como:

$$\mathrm{A} = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

Nota

A veces es interesante cambiar los papeles de las variables x e y. Con un estudio similar, el caso general d), podría escribirse en esta situación como:

$$\mathrm{A} = \int_i^j \left(\text{curva de la derecha} - \text{curva de la izquierda}\right) dy$$

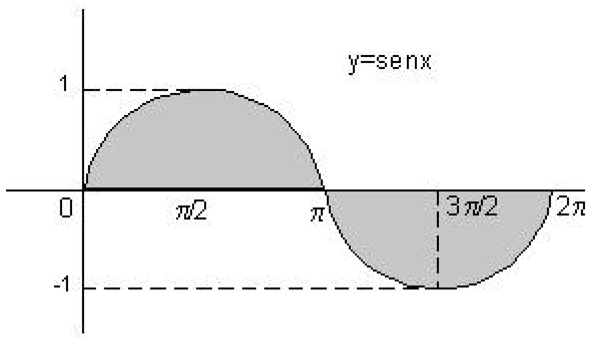
donde ahora la integración se realizará con respecto a la variable y, siendo, por lo tanto, los valores de los límites de integración valores de esta variable.

Siempre que se pueda es recomendable realizar el dibujo de la gráfica, lo que nos servirá en la mayoría de los casos para decidir la integración que nos interese, bien respecto a la variable x, bien respecto a la y.

Ejemplos

1) Calcular el área de la región limitada por la sinusoide y = sen$x$ y el eje OX, cuando $0 \leq x \leq 2p$

   Solución:

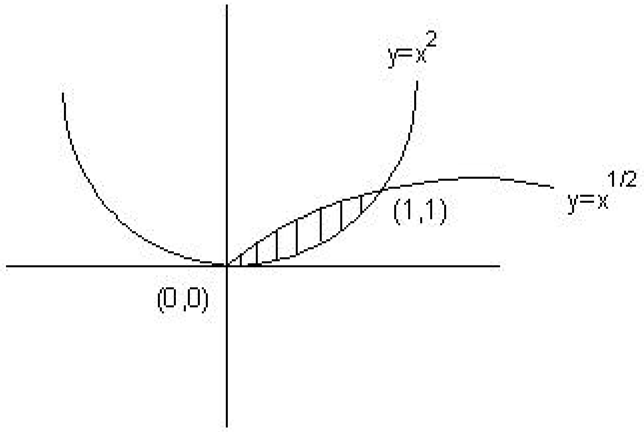


Puesto que sen$x$ ≥ 0 para $0 \leq x \leq p$, y sen$x \leq 0$ para $p \leq x \leq 2p$, es necesario calcular el área como la suma de dos integrales definidas, según dichos intervalos. Es decir:

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen}x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = -(-1-1)+(1+1) = 4$$

2) Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

Solución:



Resolviendo el sistema formado por: $y^2 = x$, $y = x^2$, obtenemos los puntos de corte (0,0), (1,1). Además, $y = \sqrt{x}$ va por encima de $y = x^2$ para valores de x en el intervalo (0,1). Por tanto:

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Volver
Índice

8.2. Cálculo del área en coordenadas paramétricas

Calculemos el área de un trapecio curvilíneo limitado por una curva dada por sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, cuando $a \le x \le b$, de modo que el parámetro t varíe entre $\alpha \le t \le \beta$, con $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Supongamos que las ecuaciones paramétricas definen una función $y = f(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Por tanto, el área del trapecio curvilíneo limitado por esta función, el eje OX, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, puede ser calculada según la fórmula:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$$

Para calcular el valor de esta integral definida, aprovechamos las ecuaciones paramétricas para realizar el cambio de variable dado por ellas, es decir, $x = \varphi(t)$, de donde $dx = \varphi'(t)dt$. Así pues, llevando este cambio de variable a la integral definida que nos proporcionará el valor del área y recordando que $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$, de las ecuaciones paramétricas, llegamos a:

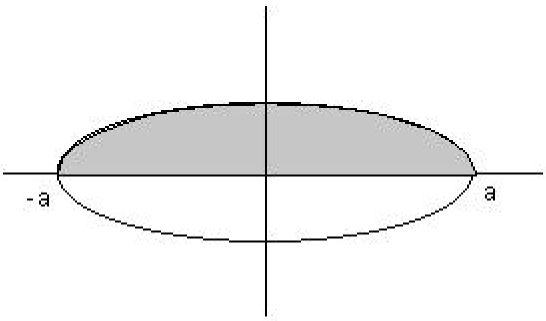
$$A = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

Ésta es la fórmula para calcular el área de un trapecio curvilíneo limitado por una curva dada en coordenadas paramétricas.

Ejemplos

1) Calcular el área del dominio limitado por la elipse, cuyas ecuaciones paramétricas vienen dadas por: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$

Solución:



Calcularemos sólo el área de la mitad superior de la elipse y la duplicaremos, debido a la simetría existente. Este hecho se utilizará mucho a lo largo del presente capítulo. Como la variable x varía desde $-a$ hasta a, el parámetro t

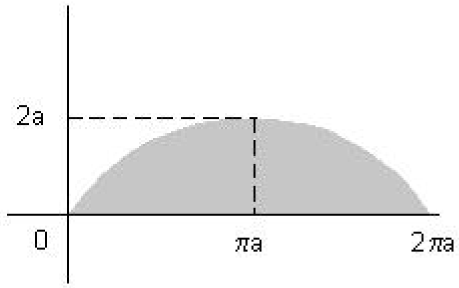
varía desde π hasta 0, respectivamente. Por tanto, la integral definida que nos dará el valor del área buscada será:

$$A = 2\int_{\pi}^{0}(b\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t)\,dt = -2ab\int_{\pi}^{0}\text{sen}^2 t\,dt = 2ab\int_{0}^{\pi}\text{sen}^2 t\,dt =$$

$$= 2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left[\frac{t}{2}-\frac{\text{sen}\,2t}{4}\right]_0^{\pi} = 2ab\,\frac{\pi}{2} = \pi ab$$

2) Calcular el área de la región limitada por el eje OX y un arco de la cicloide cuyas ecuaciones paramétricas vienen dadas por: $\begin{cases} x = a(t-\text{sen}\,t) \\ y = a(1-\cos t)\end{cases}$

Solución:



Puesto que x varía desde 0 hasta $2\pi a$, t variará desde 0 hasta 2π. Así, la integral definida que nos proporcionará el valor del área, una vez realizado el cambio de variable dado por las ecuaciones paramétricas, viene expresada por:

$$A = \int_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)\,dt = a^2\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= a^2\left[\int_{0}^{2\pi}dt - 2\int_{0}^{2\pi}\cos t\,dt + \int_{0}^{2\pi}\cos^2 t\,dt\right] = a^2\left[t-2\,\text{sen}\,t\right]_0^{2\pi} +$$

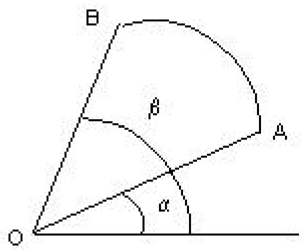
$$+a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = a^2 2\pi \;+\; a^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2$$

Volver
Índice

8.3. Cálculo del área en coordenadas polares

Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares, donde $f(\theta)$ es una función continua para $\alpha \le \theta \le \beta$. Determinemos el área del sector *OAB*, limitado por la curva $\rho = f(\theta)$ y los radios vectores $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$.



Siguiendo un proceso similar al realizado en el capítulo 1, dividimos la región de la cual queremos calcular el valor del área en n partes mediante los radios vectores $\alpha = \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n = \beta$, formando de esta manera las particiones que resultaban allí.

Designemos por $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n$ los ángulos formados por estos radios vectores; y sea ρ_i la longitud de un radio vector correspondiente a un ángulo α_i cualquiera, comprendido entre θ_{i-1}, θ_i. Consideremos el sector circular de radio ρ_i y ángulo central $\Delta\theta_i$. El área de este sector es igual a:

$$A_i = \frac{1}{2}\rho_i^2\,\Delta\theta_i$$

y será una aproximación numérica del valor del área del mismo sector determinado por la función $\rho = f(\theta)$.

Si repetimos este proceso de aproximación para todos los sectores en que hemos dividido el sector original *OAB*, obtenemos una aproximación del área total, sin más que sumar todas estas aproximaciones parciales:

$$A_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(\alpha_i)\Delta\theta_i$$

Puesto que la suma indicada es una suma correspondiente a la función $\rho^2 = f^2(\theta)$ en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$, su límite cuando $máx\,\Delta\theta_i \to 0$ y, por tanto, el valor del área buscada será la integral definida:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta$$

Nota

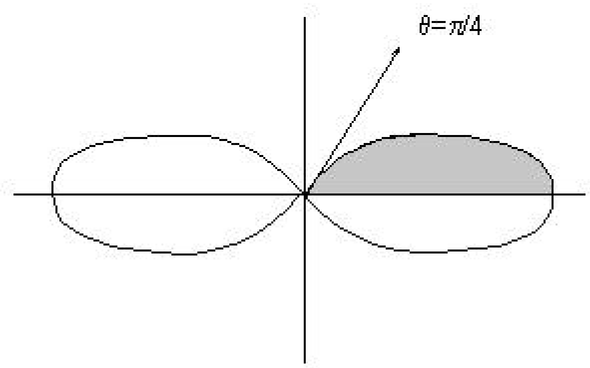
Calculando el área del sector curvilíneo mediante trapecios curvilíneos, obtendríamos el mismo resultado.

Así, el área del sector *OAB* será igual a: $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta$

Ejemplos

1) Calcular el área encerrada por la lemniscata $\rho = a\sqrt{cos\,2\theta}$.

Solución:



Como recomendamos anteriormente, realizamos un dibujo de la función, para determinar visualmente la región de la cual queremos calcular el área. Los valores de θ variarán en los intervalos [0,π/4], y [3π/4,π], donde la función cos2θ es no negativa. Además, como la función cos2θ es simétrica

respecto al ángulo ($\cos 2\theta = \cos(-2\theta)$), la gráfica debe presentar dicha simetría. Daremos valores al ángulo dentro de su dominio, donde, además, la función es continua, quedando su representación como se ve en la figura.

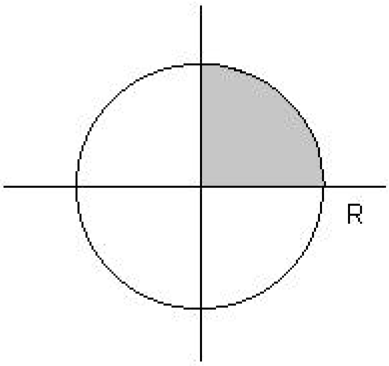
A la vista de la gráfica de la función, basta con calcular el área de la cuarta parte que se encuentra en el primer cuadrante y multiplicarla por cuatro. En esa cuarta parte, el ángulo θ varía desde 0 hasta $\pi/4$, y, por consiguiente,

$$\frac{1}{4}\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}$$

por tanto, $A = a^2$

2) Calcular el área del círculo cuya ecuación en coordenadas polares es: $\rho = R$.

Solución:



Esta función es continua para cualquier valor del ángulo; por tanto, θ variará en el intervalo $[0,2p]$. En vista de la gráfica, aplicando simetrías,

$$\mathrm{A} = 4\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} R^2 dt = 2R^2\,[t]_0^{\pi/2} = pR^2$$

Volver
Índice

8.4. Cálculo del valor medio de una función

Sea $y = f(x)$ una función definida y continua en el intervalo $[a,b]$. Designamos por m el valor más pequeño que toma $f(x)$ cuando x recorre el intervalo $[a,b]$. Análogamente, sea M el valor más grande. En estas condiciones $m \le f(x) \le M$, para todo x en el intervalo $[a,b]$. Dividimos $[a,b]$ en subintervalos, es decir, generamos una partición del mismo a través de los siguientes valores, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ obteniendo las desigualdades:

$$\begin{cases} m(x_1 - a) \le (x_1 - a) f(c_0) \le M(x_1 - a) & a \le c_0 \le x_1 \\ m(x_2 - x_1) \le (x_2 - x_1) f(c_1) \le M(x_2 - x_1) & x_1 \le c_1 \le x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ m(b - x_{n-1}) \le (b - x_{n-1}) f(c_{n-1}) \le M(b - x_{n-1}) & x_{n-1} \le c_{n-1} \le b \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro:

$$m(b-a) \le \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(c_{i-1}) \le M(b-a)$$

Cuando $n \to \infty$, se demuestra que la serie tiende a la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Así, haciendo el límite en las tres partes de la desigualdad:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Estas desigualdades muestran que el valor de la integral definida es el producto de $b - a$, longitud del intervalo de integración, por un número N comprendido entre m y M, de donde:

$$\int_a^b f(x)\,dx = N(b-a)$$

Como la función $y = f(x)$ es continua en $[a,b]$, existe al menos un valor c de la variable x tal que $N = f(c)$. Se tiene así:

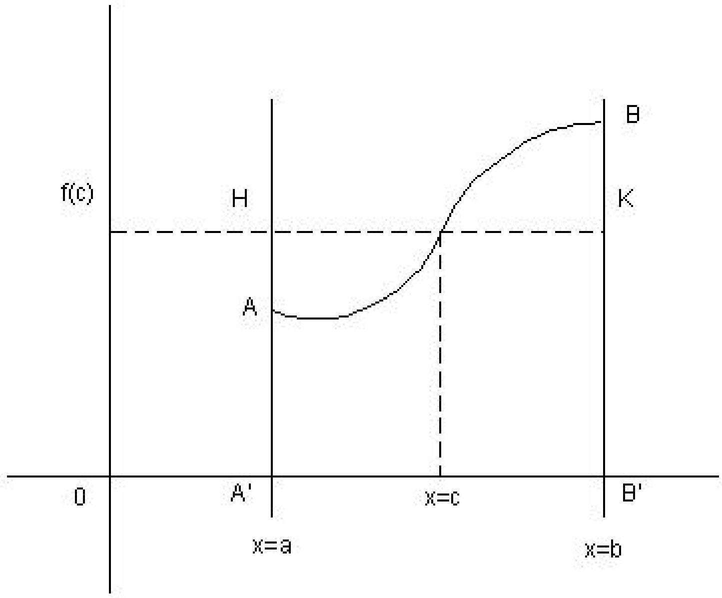
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

8.4.1. Interpretación geométrica

Volver
Índice

Supongamos la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$, de modo que, como hemos visto anteriormente, la integral definida $I = \int_a^b f(x)\,dx$ representa el área limitada por la gráfica de la función, el eje OX, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, si suponemos, sin pérdida de generalidad, que la función es no negativa a lo largo de todo el intervalo.

Por ejemplo:



En este caso, el resultado anterior nos dice que $f(c)$ es la altura del rectángulo $HA'B'K$ de base $A'B' = b - a$ y de área igual a I.

Volver
Índice

8.4.2. Valor medio de una función

El valor anterior $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, recibe el nombre de *valor medio* de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Dicha notación se justifica viendo que esta fórmula del valor medio de una función no es más que una generalización de la noción de media aritmética. Para ello, descomponemos una vez más el intervalo $[a,b]$ a través de una partición, $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, y consideramos la siguiente suma finita:

$$U_n=\frac{b-a}{n}\left[f(a)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+f(b)\right]$$

como $U_n \to I$ cuando $n \to \infty$, se deduce que:

$$\frac{1}{n}\left[f(a)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+f(b)\right]\to\frac{I}{b-a}=f(c),\ \text{cuando } n\to\infty$$

El valor medio de una función aparece como el límite de la media aritmética de $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Nota

El valor medio de una función puede ser positivo o negativo. Si $b - a > 0$, el signo de $f(c)$ es el mismo que el de $I = \int_a^b f(x)\,dx$. El valor medio de una función puede ser nulo si la integral definida I es nula.

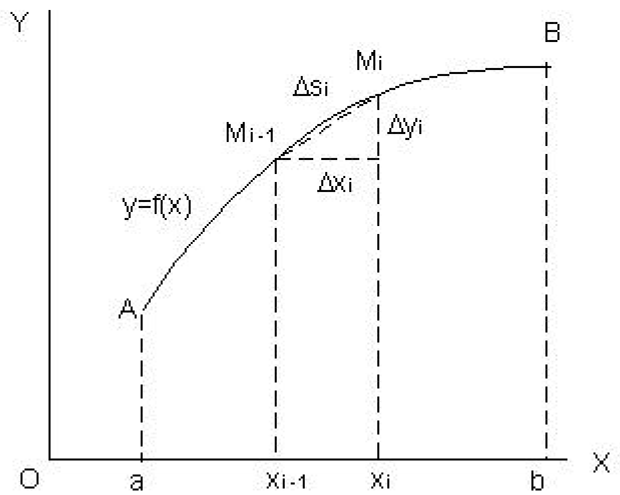
Volver
Índice

8.5. Cálculo de la longitud de curva en coordenadas cartesianas

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva plana en coordenadas cartesianas. Busquemos la longitud del arco AB de esta curva, comprendida entre las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Para ello, como hemos realizado anteriormente, construiremos una partición del intervalo $[a,b]$, encontraremos una

aproximación a la longitud de la curva en cada uno de los subintervalos que proporciona la partición, sumaremos todas esas aproximaciones para obtener una aproximación a la longitud completa buscada y, finalmente, pasaremos al límite cuando la longitud del mayor subintervalo de la partición tiende a cero, para encontrar la fórmula que nos permita calcular la longitud de un arco de curva a través del cálculo de alguna integral definida determinada.

Comenzaremos, como siempre, realizando un dibujo de la función, que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, no negativa en todo el intervalo $[a,b]$.



Generamos la partición del intervalo $[a,b]$ tomando sobre el arco AB los puntos A, M_1, M_2, ... , M_i, ... ,M_{n-1}, B, cuyas abscisas son, respectivamente, $a = x_0$, x_1, ... , x_i, ... , x_{n-1}, $x_n = b$.

Tracemos las cuerdas AM_1, $M_1 M_2$, ... , $M_{n-1}B$, cuyas longitudes designaremos por $\Delta S_1, \Delta S_2$, ... ,ΔS_n, respectivamente. Obtenemos así una línea poligonal $AM_1 M_2 \dots M_{n-1} B$ inscrita en el arco AB. La longitud de esa poligonal que será una aproximación a la longitud del arco de curva buscada es igual a: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

El límite al cual tiende la longitud de la poligonal inscrita, cuando la longitud de su lado mayor tiende a cero, se llama *longitud del arco AB*, y es el valor que buscamos, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \to S \text{, cuando máx } \Delta S_\text{i} \to 0$$

Veremos ahora que, si la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$, este límite existe y obtendremos la fórmula que nos permitirá calcular la longitud de curva. Para ello, introduzcamos la siguiente notación:

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}}$$

Ahora aplicamos el teorema de Lagrange o teorema del valor medio para derivadas:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i)\text{, donde} \quad x_{i-1} < c_i < x_i$$

Por tanto,

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\ \Delta x_i$$

De este modo la longitud de la poligonal inscrita es:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\ \Delta x_i$$

Como por hipótesis la función $f'(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$, la función $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ también será continua en el mismo intervalo. En

consecuencia, la suma integral escrita tiene límite cuando el máximo de los valores de Δx_i tienda hacia cero. Este límite será la integral definida:

$$S=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Así, hemos obtenido la fórmula para calcular la longitud de un arco de curva:

$$S=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\,dx$$

8.5.1. Diferencial de un arco de curva

Partiendo de la fórmula anterior, se puede obtener la derivada de la longitud del arco respecto a la abscisa. Considerando que el límite superior de integración es variable y designándolo por x (sin cambiar la variable de integración), obtenemos la longitud del arco S en función de x:

Volver
Índice

$$S(x)=\int_a^x \sqrt{1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\,dx$$

Derivando esta integral respecto del límite superior de integración:

$$\frac{dS}{dx}=\sqrt{1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\Rightarrow (dS)^2=(dx)^2+(dy)^2\Rightarrow dS=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

8.5.2. Comparación del arco y de su cuerda

Consideramos sobre el arco AB de la figura anterior dos puntos M, N. Nos proponemos comparar la longitud del arco, S, y de su cuerda, C, cuando se hace tender N hacia M. Las componentes del vector MN (como cuerda) sobre los ejes son $(\Delta x\,,\ \Delta y)\Rightarrow\ C^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$.

Si x_0 es la abscisa de M $\Rightarrow$ el arco AM = $S(x_0)$, y el arco AN = S(x), de donde se deduce que la longitud del arco MN es: $S = S(x) - S(x_0) = \Delta S$. Así, el cociente entre el cuadrado de la longitud del arco y el de la longitud de la cuerda será:

$$R = \frac{(\Delta S)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{(\Delta S)^2}{(\Delta x)^2} \frac{1}{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}}$$

Además, cuando $\Delta x \to 0$, se tiene que $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to \frac{dS}{dx}$, y en las mismas condiciones $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$. Con todo esto:

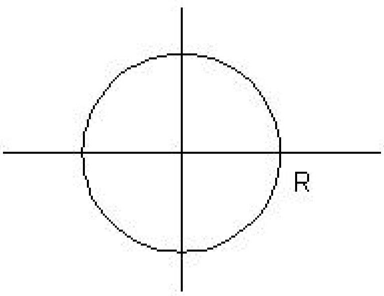
$$R \to \frac{[S'(x)]^2}{1 + y'^2} = 1$$

como queríamos demostrar.

Ejemplos

1) Calcular la longitud de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.

Solución:



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \;\Rightarrow\; ds = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\;dx$$

La longitud total se obtiene, por simetría, calculando la longitud del trozo de circunferencia que se encuentra en el primer cuadrante, cuando x varía entre 0 y R, y multiplicándola por 4. Es decir,

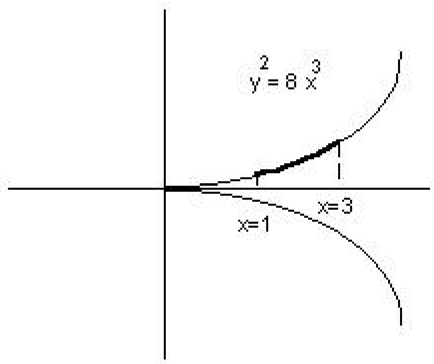
$$L = 4\int_0^R \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx = 4\int_0^R \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx = 4\int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\,dx =$$

$$= 4R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = \{x = R\,\text{sen}t \;\Rightarrow\; dx = R\cos t\,dt\} =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{R\cos t}{\sqrt{R^2-R^2\text{sen}^2 t}}\,dt = 4R\int_0^{\pi/2} \frac{R\cos t}{R\cos t}\,dt = 4R\,\frac{\pi}{2} = 2\pi R$$

2) Encontrar la longitud del arco de curva cuya ecuación es $y^2 = 8x^3$, correspondiente al intervalo $1 \le x \le 3$.

Solución:



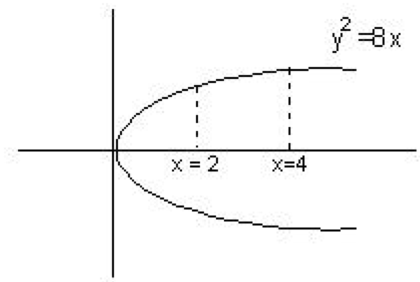
$$y = 2\sqrt{2}\; x^{3/2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = 3\sqrt{2}\; x^{1/2}$$

$$L = \int_1^3 \sqrt{1+18x}\,dx = \frac{1}{18}\int_1^3 18(1+18x)^{1/2}\,dx = \frac{1}{18}\frac{2}{3}\left[(1+18x)^{3/2}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{27}\left[\sqrt{55^3} - \sqrt{19^3}\right] = 12{,}03969766$$

3) Encontrar la longitud del arco de curva cuya ecuación es $y^2 = 8x$, correspondiente al intervalo $2 \le x \le 4$.

Solución:



$$y = \sqrt{8x} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8}{2\sqrt{8x}} = \frac{4}{\sqrt{8x}}$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{1+\frac{16}{8x}}\,dx = \int_2^4 \sqrt{1+\frac{2}{x}}\,dx$$

Realizamos el cambio de variable:

$$1+\frac{2}{x}=t^2 \Rightarrow x=\frac{2}{t^2-1} \Rightarrow dx=\frac{-4t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

Con este cambio, los valores que toma la nueva variable de integración son:

$$x=4 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x=2 \Rightarrow t=\sqrt{2}$$

Por tanto,

$$L=-4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3/2}}\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt=4\int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}}\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt$$

que resulta ser un cociente de polinomios. Utilizamos, pues, el método de descomposición en fracciones simples, debido a la naturaleza de los ceros del denominador:

$$\frac{4t^2}{\left(t^2-1\right)^2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t+1)^2}$$

poniendo denominador común:

$$4t^2=A(t-1)(t+1)^2+B(t+1)^2+C(t+1)(t-1)^2+D(t-1)^2$$

Damos ahora valores a la variable t:

$t=1$	$\Rightarrow$	$4=4B$	$\Rightarrow$	$B=1$
$t=-1$	$\Rightarrow$	$4=4D$	$\Rightarrow$	$D=1$
$t=0$	$\Rightarrow$	$0=-A+B+C+D$	$\Rightarrow$	$C-A=-2$
$t=2$	$\Rightarrow$	$16=9A+9B+3C+D$	$\Rightarrow$	$C+3A=2$

Resolviendo, resulta que: $A=1$, $B=1$, $C=-1$, $D=1$, con lo cual:

$$L=\int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t-1}+\int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{(t-1)^2}-\int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t+1}+\int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{(t+1)^2}=$$

$$=\left[-\mathrm{Log}\left|t^2-1\right|-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}}=\left[-\mathrm{Log}\left|t^2-1\right|-\frac{2t}{t^2-1}\right]_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}}=$$

$$=-2\sqrt{2}-\mathrm{Log}2+4\sqrt{\frac{3}{2}}=1{,}37740518$$

Volver Índice

8.6. Cálculo de la longitud de curva en coordenadas paramétricas

Sean $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ($\alpha\leq t\leq\beta$), las ecuaciones en paramétricas de una función, donde $\varphi(t)$, $\psi(t)$ son funciones continuas con derivadas continuas en el intervalo dado, tal que $\varphi'(t)\neq 0$ en dicho intervalo. En este caso las ecuaciones paramétricas determinan una cierta función $y=f(x)$ continua, con derivada continua de la forma:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Sean $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, los valores entre los que varía la variable x. Realizamos el siguiente cambio de variable en la integral definida que obtuvimos para el cálculo de la longitud de arco en el caso de una función dada en coordenadas cartesianas, vista en el apartado anterior:

$$x=\varphi(t)\Rightarrow dx=\varphi'(t)\,dt$$

con lo que, recordando que $y=\psi(t)$, llegamos a:

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\frac{[\psi'(t)]^2}{[\varphi'(t)]^2}}\,\varphi'(t)\,dt \qquad \text{o} \qquad L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt$$

Observación

Se puede demostrar que esta fórmula conserva su validez para las curvas que son cortadas por rectas verticales en más de un punto (en particular para las curvas cerradas) con la condición de que $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ sean continuas en todos los puntos de la curva.

Ejemplos

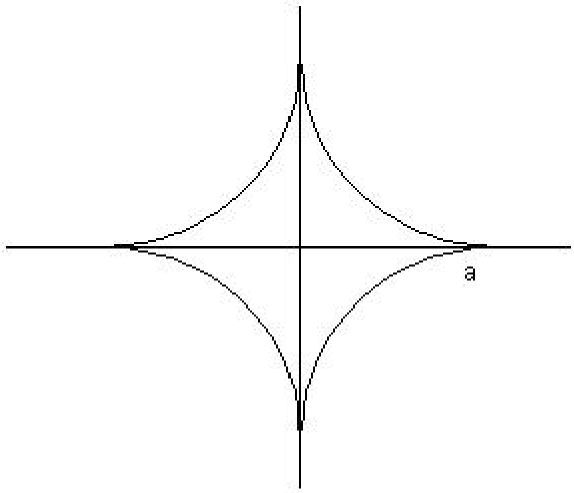
1) Calcular la longitud de la hipocicloide (astroide) cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\mathrm{sen}^3 t \end{cases}$$

Solución:

Puesto que la curva es simétrica respecto de los dos ejes de coordenadas, calculemos la longitud del arco perteneciente al primer cuadrante. En él se tendrá:

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\,t\,, \quad \frac{dy}{dt} = 3a\,\mathrm{sen}^2 t\cos t$$



Además, t variará entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Por tanto, la longitud total L se calculará a través de la integral definida:

$$\frac{1}{4}L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\,\text{sen}^2 t + 9a^2\text{sen}^4 t\cos^2 t}\;dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t\,\text{sen}^2 t\left(\cos^2 t + \text{sen}^2 t\right)}\;dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,t\cos t\;dt = 3a\left[\frac{\text{sen}^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow L = 6a$$

2) Calcular la longitud de la cicloide generada por un círculo de radio 1.

Solución:

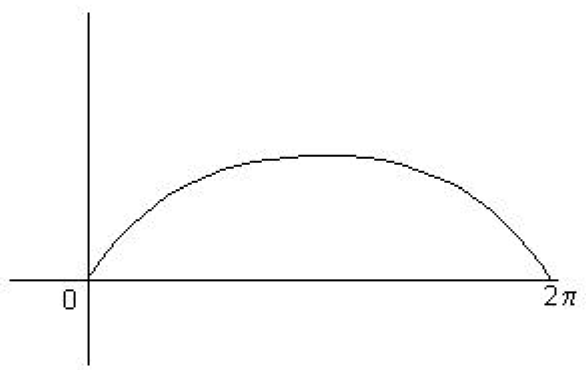
Las ecuaciones en paramétricas de la cicloide, cuando el radio del círculo que la genera es 1, vienen dadas por:

$$x = t - \text{sen}\,t \quad , \quad y = 1 - \cos t$$

con t variando de 0 a $2p$, es decir, cuando el círculo generador da una vuelta completa sobre sí mismo. Por tanto, la longitud de un arco de la cicloide será:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \text{sen}^2 t}\;dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\;dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{4\text{sen}^2(t/2)}\,\frac{dt}{2} = 4\int_0^{\pi/2} \text{sen}(t/2)\frac{dt}{2} = -4\left[\cos(t/2)\right]_0^{2\pi} = 8$$



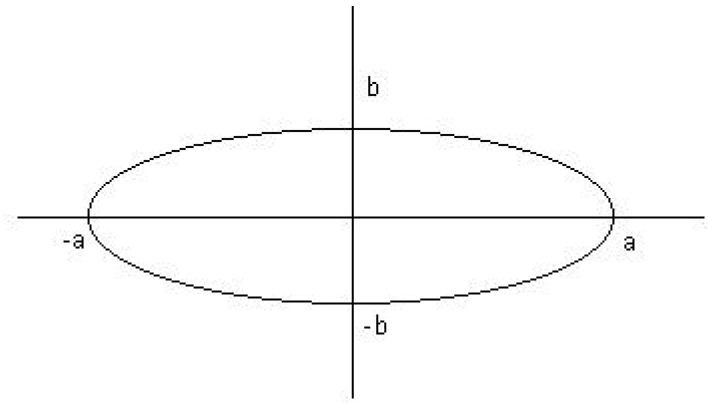
Notemos que, si el radio del círculo que genera a la cicloide es en general distinto de uno, $R \neq 1$, entonces la longitud de un arco de la cicloide viene expresada como $L = 8R$.

3) Calcular la longitud de la elipse de ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$

donde el parámetro t varía entre 0 y $2p$ $(a > b)$.

Solución:

Debido a la simetría de la elipse centrada en el origen con respecto a los dos ejes coordenados, calcularemos la cuarta parte del arco, es decir, la longitud del arco que corresponde a la variación del parámetro en el primer cuadrante, desde $t = 0$ hasta $t = p/2$.



$$\frac{L}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \mathrm{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}\ dt = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t}\ dt$$

donde $k = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$.

Por lo tanto, $L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t}\ dt$.

Esta integral no la podemos expresar mediante funciones elementales, y se puede calcular únicamente por medio de métodos de cálculo numérico por aproximación (por ejemplo, utilizando la fórmula de Simpson).

Observación

Si tenemos una curva en el espacio, dada por sus coordenadas paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \theta(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, la longitud de uno de sus arcos se define (de manera similar que para una curva plana), como el límite al cual tiende la longitud de una línea quebrada inscrita cuando la longitud de su lado mayor tiende a cero. Si las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ son continuas y tienen derivadas continuas en $[\alpha, \beta]$, entonces la curva tiene una longitud determinada (es decir, existe el límite indicado arriba), que se calcula mediante la fórmula:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \theta'(t)^2}\ dt$$

Admitamos este último resultado sin demostración.

Ejemplo

Calcular la longitud de un arco de la hélice cuyas ecuaciones en paramétricas vienen expresadas como

$$x = a\cos t \quad , \quad y = a\,\mathrm{sen}\,t \quad , \quad z = amt$$

y donde el parámetro t varía entre 0 y $2p$.

Solución:

Calculamos las diferenciales de las tres variables en términos de la diferencial del parámetro:

$$dx = -a\,\mathrm{sen}\,t\ dt \quad , \quad dy = a\cos t\ dt \quad , \quad dz = am\ dt$$

Por lo tanto, sustituyendo en la fórmula:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\text{sen}^2t+a^2\cos^2t+a^2m^2}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+m^2}\,dt=2pa\sqrt{1+m^2}$$

8.7. Cálculo de la longitud de curva en coordenadas polares

Volver
Índice

Sea $\rho=f(\theta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares, donde ρ es el radio polar y θ el ángulo polar. Escribamos las fórmulas de paso de coordenadas polares a cartesianas:

$$x=\rho\cos\theta \quad , \quad y=\rho\,\text{sen}\theta$$

Al sustituir ρ por su expresión, en función de θ, obtenemos las ecuaciones:

$$x=f(\theta)\cos\theta \quad , \quad y=f(\theta)\text{sen}\theta$$

Estas ecuaciones se pueden considerar como las ecuaciones paramétricas de la curva y aplicar el resultado anterior para el cálculo de la longitud de un arco de curva. Hallemos, para ello, las derivadas de x, y respecto del parámetro θ:

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\text{sen}\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\text{sen}\theta+f(\theta)\cos\theta \quad \Rightarrow$$

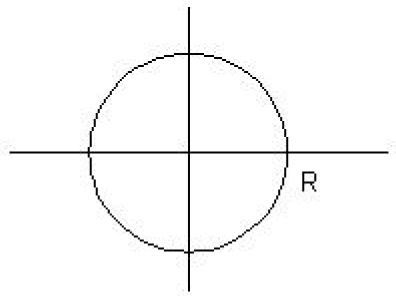
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2=\rho'^2+\rho^2 \Rightarrow$$

$$L=\int_a^b\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta$$

Ejemplos

1) Hallar la longitud del círculo $\rho=R=$ constante, con t variando entre 0 y $2p$.

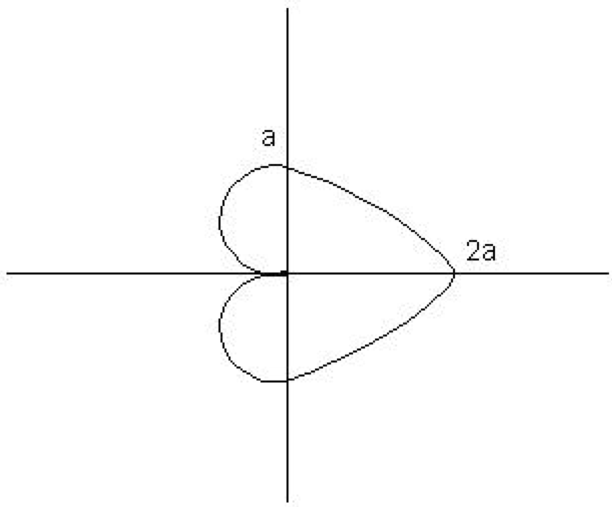
Solución:



$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2}\, dt = 2$$

2) Calcular la longitud de la cardioide $\rho = a\,(1 + \cos\theta)$.

Solución:



$\rho' = -\, a \operatorname{sen}\theta$; por lo tanto,

$$ds = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\text{sen}^2\theta}\ d\theta = a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta = 2a\ \cos(\theta/2)\ d\theta$$

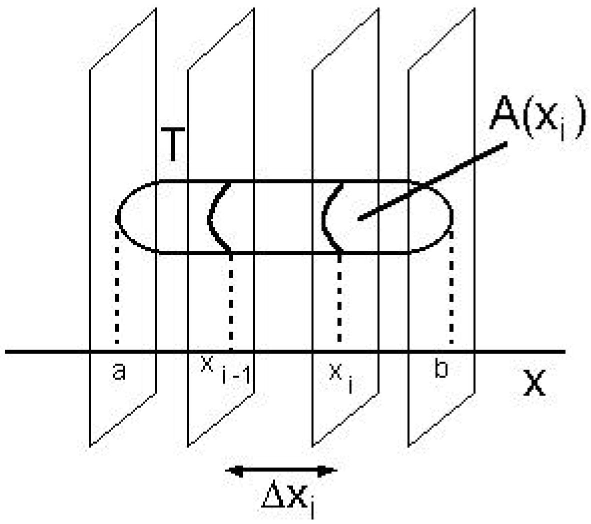
orientando la curva en el sentido de los θ crecientes, para $0 < \theta < p$.
Se puede hacer variar θ de 0 a p, y doblar para tener la longitud total, porque la curva es simétrica respecto al eje *OX*. Así,

$$L = 2\int_0^{\pi} 2a\cos(\theta/2)\, d\theta = 8a\ [\text{sen}(\theta/2)]_0^{\pi} = 8a$$

Volver
Índice

8.8. Cálculo del volumen de un cuerpo

Dado un cuerpo *T*, supongamos que se conoce el área de toda sección arbitraria de este cuerpo por un plano perpendicular al eje *OX*.



Este área depende de la posición del plano secante, es decir, es función de x, $A = A(x)$.

Supongamos que $A(x)$ es una función continua de x, y calculemos el volumen del cuerpo dado. Tracemos los planos $x = x_0 = a$, $x = x_1, \ldots,$ $x = x_n = b$. Estos planos dividen al cuerpo en franjas. En cada intervalo $x_{i-1} \le x \le x_i$, elijamos un punto arbitrario c_i, y para cada valor de $i = 1, ..., n$ construyamos un cuerpo cilíndrico cuya generatriz sea paralela al eje OX y se apoye sobre el contorno de la sección del cuerpo T por el plano $x = c_i$. El volumen de tal cilindro elemental, con el área de la base igual a $A(c_i)$ (con $x_{i-1} \le c_i \le x_i$), y la altura Δx_i, es igual a $A(c_i)\,\Delta x_i$. El volumen total de todos los cilindros es:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x_i$$

El límite de esta suma, si existe, cuando $\text{máx}\ \Delta x_i \to 0$, se llama volumen del cuerpo dado:

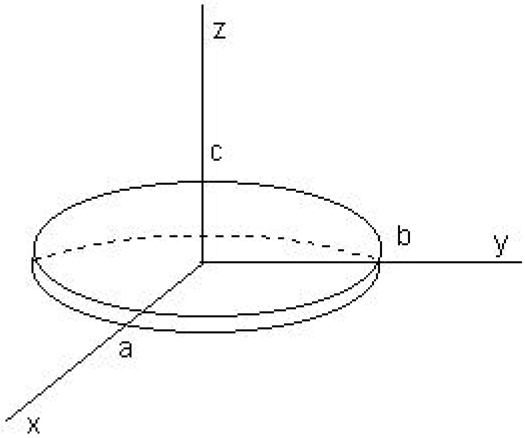
$$\sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x_i \to V, \quad \text{cuando} \quad \text{máx}\ \Delta x_i \to 0$$

Puesto que V_n representa, evidentemente, una suma integral correspondiente a una función continua $A(x)$ en el segmento $a \le x \le b$, entonces, el límite indicado existe y se expresa por la integral definida:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

Ejemplo

Calcular el volumen del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



Solución:

La sección del elipsoide cortado por un plano paralelo al plano OYZ que se encuentre a la distancia x de éste último da la elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ o, equivalentemente,

$$\frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} = 1$$

de semiejes $b_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

Pero, como el área de dicha elipse es igual a $\pi b_1 c_1$, entonces,

$$A(x) = p\ b\ c\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

De donde se sigue que el volumen del elipsoide será:

$$V = p\ b\ c \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = p\ b\ c \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3} p\ a\ b\ c$$

Notemos que si $a = b = c$, entonces el elipsoide no es nada más que una esfera, de volumen $V = \frac{4}{3} p a^3$.

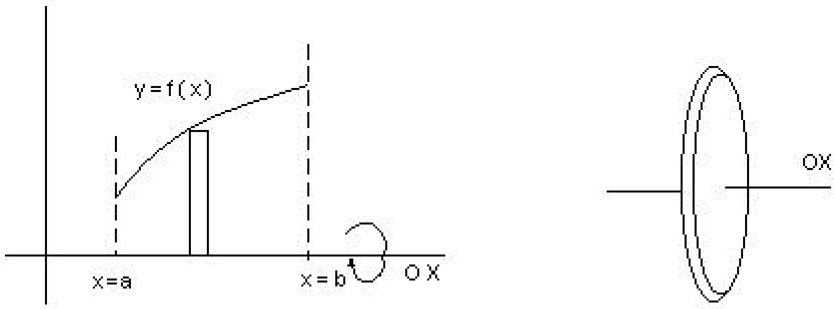
8.9. Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución

Volver
Índice

Si una región R en el plano OXY se hace girar en torno a un eje del plano, generará un sólido llamado *sólido de revolución*.

8.9.1. Método de discos

Consideremos el cuerpo de revolución engendrado por un trapecio curvilíneo al girar alrededor del eje OX. En este método supondremos que el trapecio está limitado por la curva $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$, el eje OX, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Bajo estas hipótesis, toda sección arbitraria del cuerpo por un plano perpendicular al eje de abscisas es un círculo de área $A = py^2 = p\,[f(x)]^2$.



Aplicando la fórmula general vista en el apartado anterior para el cálculo de volúmenes en general, en este caso particular obtendremos la fórmula del método llamado de discos:

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b [\,f(x)]^2\,dx$$

Ejemplo

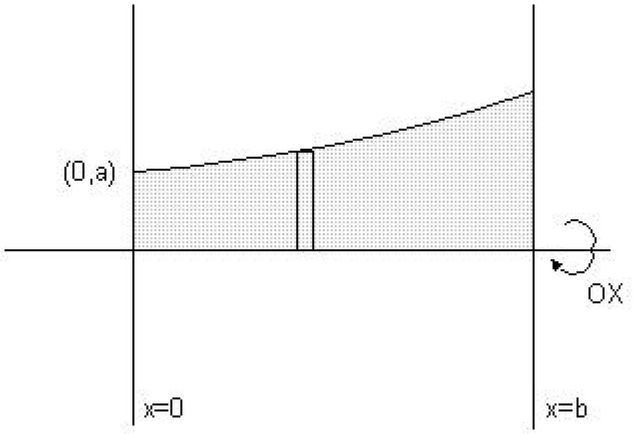
Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la rotación de la catenaria $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ alrededor del eje OX, en el intervalo comprendido desde $x = 0$ hasta $x = b$.

Solución:

La catenaria es una función continua para todo número real que toma valores positivos si suponemos que $a > 0$. Por tanto, podemos aplicar el método de discos para calcular el volumen que se pide:

$$V = p\ \frac{a^2}{4}\int_0^b \left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)^2 dx = p\ \frac{a^2}{4}\int_0^b \left(e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}\right) dx =$$

$$= p\ \frac{a^2}{4}\left[\frac{a}{2}e^{2x/a} + 2x - \frac{a}{2}e^{-2x/a}\right]_0^b = \frac{\pi a^3}{8}\left(e^{2b/a} - e^{-2b/a}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2}$$



Nota

El método de discos se puede enunciar también cambiando los papeles de las variables x e y; es decir, el volumen del sólido de revolución generado por la región plana limitada por la gráfica de $x = g(y)$, el eje OY, y las rectas horizontales $y = c$, $y = d$, al girar alrededor del propio eje OY, vendrá expresado por:

$$V = \pi\int_c^d [g(y)]^2\, dy$$

Volver Índice

8.9.2. Método de las arandelas

Consideramos ahora el caso en que la región acotada por las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y por las gráficas de dos funciones continuas $y = f(x)$, $y = g(x)$, con $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo valor de x en el intervalo $[a,b]$, gira alrededor del eje OX. Entonces, si $g(x) > 0$ en todo el intervalo $[a,b]$, el sólido tiene un hueco o agujero central.

El volumen V puede calcularse aplicando el método de discos anterior, restando el volumen del sólido generado por la región pequeña del volumen generado por la región más grande.

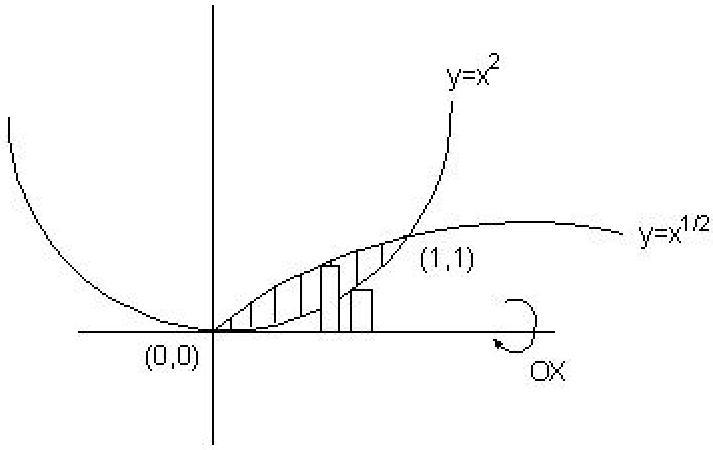
$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx - \pi\int_a^b [g(x)]^2\, dx = \pi\int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx$$

Análogamente, como en el método de discos, se pueden cambiar los papeles de las variables si se hace alrededor del eje *OY*.

Ejemplo

Calcular el volumen del sólido de revolución engendrado por la rotación de la región encerrada por las gráficas $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, alrededor del eje *OX*.

Solución:



$$V = p \int_0^1 \left(x - x^4\right) dx = p \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = p \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

Volver
Índice

8.9.3. Método de las envolventes cilíndricas (cortezas)

El volumen de una envolvente cilíndrica de radio exterior r_2, de radio interior r_1 y altura h es:

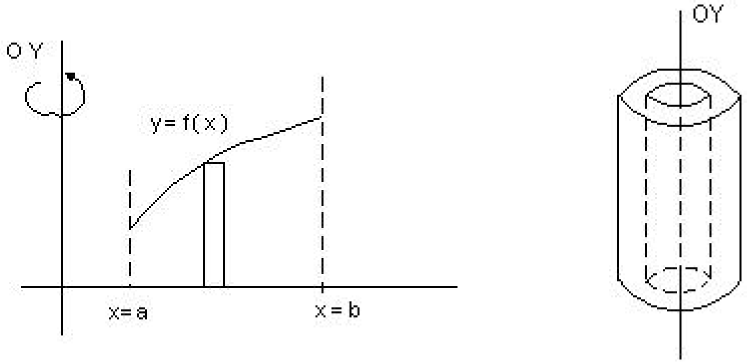
$$p r_2^2 h - p r_1^2 h = p\,(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)\,h = 2p\,\frac{r_2 + r_1}{2}\left(r_2 - r_1\right)h$$

Sea $r = \dfrac{r_2 + r_1}{2}$ el radio medio de la corteza. Entonces, el volumen de la corteza es:

$$V = 2\pi r h \Delta r$$

Sea $y = f(x)$ continua y no negativa en el intervalo $[a,b]$ para $0 \leq a < b$. Entonces, el volumen del sólido de revolución generado al girar la región acotada por la gráfica de $y = f(x)$, las rectas verticales $x = a$, $x = b$, y el eje OX, alrededor del eje OY, es:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

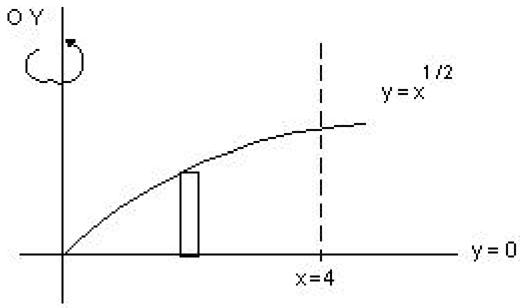


Ejemplo

Obtener el volumen V del sólido formado haciendo girar la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$, en torno al eje OY.

Solución:

$$V = 2p \int_0^4 x\sqrt{x}\ dx = 2p\ \frac{2}{5}\left[x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}$$



Volver
Índice

8.10. Cálculo del área lateral de un cuerpo de revolución

Dada una superficie engendrada por la revolución de la curva $y = f(x)$ alrededor del eje OX, calculemos el área lateral de esta superficie de revolución en el intervalo $a \le x \le b$.

Supongamos que la función $y = f(x)$ es continua y tiene derivada continua en todos los puntos del intervalo $[a,b]$.

Tracemos las cuerdas AM_1, $M_1 M_2$, ... , $M_{n-1}B$, cuyas longitudes designamos por ΔS_1, ΔS_2, ... , ΔS_n. En su rotación, cada cuerda de longitud ΔS_i $(i = 1, \ldots , n)$ describe un tronco de cono, cuya superficie lateral es:

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i$$

Pero, $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}}\ \Delta x_i$.

Aplicando el teorema de Lagrange, obtendremos:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i) , \qquad x_{i-1} < c_i < x_i$$

Por tanto:

$$\Delta S_i = \sqrt{1+f'^2(c_i)}\,\Delta x_i \quad \Rightarrow \quad \Delta P_i = 2\pi\,\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'^2(c_i)}\,\Delta x_i$$

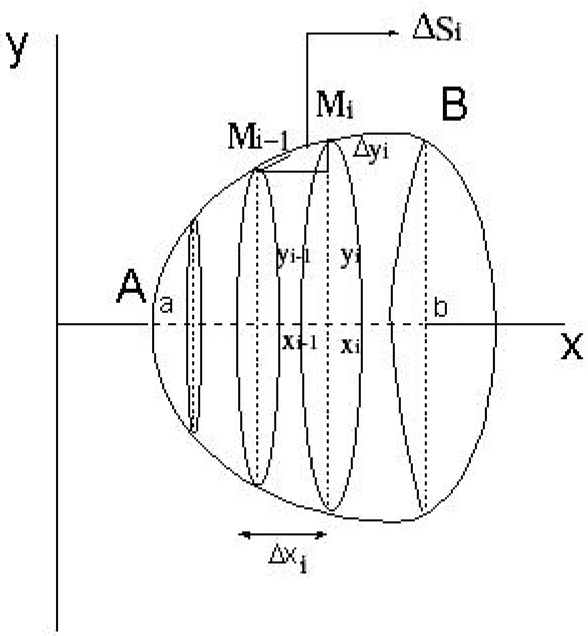
La superficie descrita por la línea poligonal es igual a:

$$P_n = 2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'^2(c_i)}\,\Delta x_i =$$

$$= \pi\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\sqrt{1+f'^2(c_i)}\,\Delta x_i\right] \qquad (1)$$

extendida a todas las cuerdas de la poligonal. El límite de esta suma, cuando el lado mayor de la poligonal tiende a cero, se llama *área lateral de la superficie de revolución*.

El proceso seguido se puede observar en la siguiente figura, donde se ha dibujado un sólido de revolución particular, que nos sirve para ilustrar fácilmente el desarrollo seguido para la obtención de la fórmula correspondiente.



Nótese que la suma anterior no es una suma integral de la función

$$2\pi\, f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} \qquad (2)$$

puesto que en el sumando correspondiente al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ figuran varios puntos del mismo, a saber, x_{i-1}, x_i, c_i. Sin embargo, se puede demostrar que el límite de la suma (1) es igual al de la suma integral de la función (2), es decir:

$$P \to \pi\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+f'^2(c_i)}\ \Delta x_i\ , \quad \text{cuando} \quad máx\,\Delta x_i \to 0$$

$$P \to \pi\sum_{i=1}^{n} 2\,f(c_i)\sqrt{1+f'^2(c_i)}\ \Delta x_i\,, \quad \text{cuando} \quad máx\,\Delta x_i \to 0$$

Por tanto, la superficie lateral buscada, que denotaremos por S, es:

$$S_{ox} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

Nota

Ésta es la fórmula para el cálculo del área lateral de un sólido de revolución cuando se rota la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$ (continua y con derivada continua en $[a,b]$), el eje OX, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, alrededor del eje OX. Si se hace el mismo cálculo girando la misma región alrededor del eje OY, la fórmula correspondiente es:

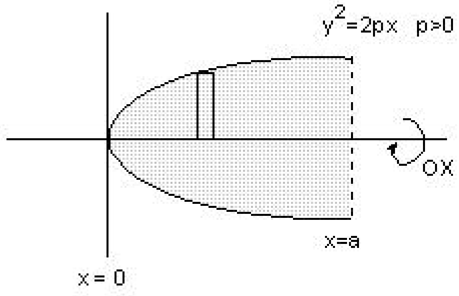
$$S_{oy} = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

a la cual se llega siguiendo un proceso similar al desarrollado en el caso anterior, considerando ahora el tronco de cono que se genera en la rotación alrededor del eje OY con bases perpendiculares al propio eje OY, y cuya generatriz coincide con la del caso anterior.

Ejemplos

1) Determinar la superficie lateral del paraboloide engendrado por la revolución alrededor del eje *OX* del arco de la parábola $y^2 = 2px$, correspondiente a la variación de x desde $x = 0$ hasta $x = a$.

   Solución:



$$y = \sqrt{2px}\,, \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}}$$

$$S = 2p \int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}\,dx = 2p\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{2x+p}\,dx =$$

$$= 2p\left[\sqrt{p}\,\frac{2}{3}(2x+p)^{3/2}\,\frac{1}{2}\right]_0^a = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{3/2} - p^{3/2}\right]$$

Nótese que sólo se ha elegido la parte superior de la parábola para calcular la superficie lateral del sólido engendrado, ya que al girar una vuelta entera alrededor del eje *OX* genera el sólido completo. Si consideramos la parábola entera, obtendríamos, obviamente, el doble de dicha superficie lateral.
Por último, nótese que, si $p < 0$, el sólido engendrado es el mismo, sólo que colocando la parábola en la otra parte del plano. Por tanto, se puede considerar sin pérdida de generalidad el caso en que $p > 0$, como se ha hecho.

2) Calcular la superficie lateral de un cono.

Solución:

La ecuación de la curva que engendra un cono girando alrededor del eje OX es la de una recta de ecuación $y = ax$, donde

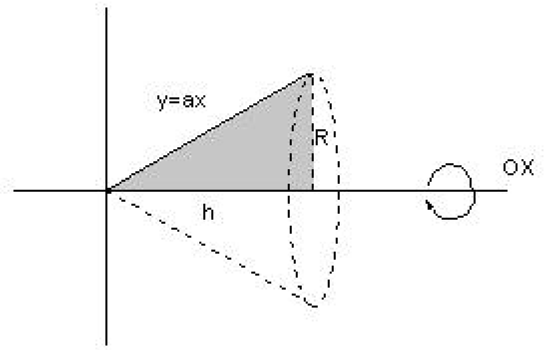
$$a = \text{pendiente} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{h}, \quad y' = a = \frac{R}{h}.$$

Así:

$$S = \int_0^h 2\pi\, y \sqrt{1+y'^2}\, dx = \int_0^h 2\pi \frac{R}{h} x \sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}\, dx = 2p \frac{R}{h} \sqrt{\frac{h^2+R^2}{h^2}} \int_0^h x\, dx$$

como $L = \sqrt{h^2+R^2}$ es la longitud de la generatriz del cono,

$$S = \frac{2\pi R}{h^2} L \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \frac{2\pi R}{h^2} L \frac{h^2}{2} = p\, R\, L$$



Volver
Índice

8.11. Cálculo del trabajo mediante la integral definida

Supongamos que, bajo el efecto de una fuerza F, el punto material M se desplaza a lo largo de la recta OS y que la dirección de la fuerza coincide con la del movimiento. Se desea determinar el trabajo producido por la fuerza F al desplazar el punto M desde la posición $s = a$ hasta la posición $s = b$.

1) Si F es constante, el trabajo W se expresará como $W = F(b - a)$.

2) Supongamos que F varía de forma continua en función de la posición del punto material, es decir, es una función $F(s)$, continua en el segmento $a \leq s \leq b$. Dividimos el intervalo $[a,b]$ en n partes arbitrarias de longitudes $\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\Delta s_n$. Elegimos en cada segmento parcial $[s_{i-1}, s_i]$ un punto arbitrario c_i y sustituimos el trabajo de la fuerza $F(s)$ en el camino $\Delta s_i\ (i = 1,\ldots,n)$ por el producto $F(c_i)\Delta s_i$. Esto significa que en cada intervalo parcial admitimos como constante la fuerza F, es decir, $F = F(c_i)$. En tal caso, la expresión $F(c_i)\Delta s_i$ para Δs_i suficientemente pequeño dará un valor aproximado del trabajo de la fuerza F a lo largo del camino Δs_i, y la suma

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta s_i$$

será la expresión aproximada del trabajo de la fuerza F en todo $[a,b]$.
Es evidente que W_n representa una suma integral de la función $F = F(s)$ en el intervalo $[a,b]$. El límite de esta suma cuando $máx\,\Delta s_i \to 0$ existe y expresa el trabajo de la fuerza $F(s)$ a lo largo del camino desde el punto $s = a$ hasta el $s = b$. Así:

$$W = \int_a^b F(s)\, ds$$

Ejemplos

1) La compresión S de un muelle helicoidal es proporcional a la fuerza aplicada F. Calcular el trabajo de la fuerza F al comprimir el muelle 5 cm, si es preciso aplicar una fuerza de 1 kp para comprimirlo 1 cm.

Solución:

Según la hipótesis, la fuerza F y el desplazamiento s están ligados por la ecuación $F = k\ s$, donde k es una constante. Expresamos s en metros y F en kilopondios. Si $s = 0{,}01$, entonces $F = 1$, es decir, $1 = k\ 0{,}01$, de donde $k = 100$, es decir, $F = 100\ s$.
Aplicando la fórmula anterior se tiene

$$W = \int_0^{0.05} 100\, s\, ds = 100 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^{0.05} = 50\ (0{,}05)^2 = 0{,}125 \text{ kpm}$$

2) La fuerza F de repulsión entre dos cargas eléctricas q_1, q_2 del mismo signo, dispuestas a una distancia r, se expresa mediante la fórmula $F = k\ \dfrac{q_1 q_2}{r^2}$, donde k es una constante.
Determinar el trabajo de la fuerza F para desplazar la carga q_2 desde el punto A, que se encuentra a la distancia r_1 de q_1, al punto B, que se halla a la distancia r_2 de q_1.

Solución:

Supongamos que q_1 se encuentra en el punto 0 tomado como origen. Así:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = -k q_1 q_2 \left[\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = k q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Para $r_2 = \infty$, se tiene $W = \displaystyle\int_{r_1}^{\infty} k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = k\ \frac{q_1 q_2}{r_1}$.

Si, además, $q_2 = 1$, tenemos $W = k\ \dfrac{q_1}{r_1}$ (potencial del campo creado por la carga q_1).

Volver
Índice

8.12. Coordenadas del centro de gravedad

Dado en el plano *OXY* un sistema de puntos materiales $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$, cuyas masas son respectivamente m_1, m_2, ... , m_n, los productos $x_i\, m_i$ e $y_i\, m_i$ se llaman momentos estáticos de la masa m_i respecto a los ejes *OY* y *OX*.

Designemos por x_c, y_c las coordenadas del centro de gravedad (baricentro) del sistema dado. Estas coordenadas se calculan mediante las fórmulas:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (3)$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (4)$$

Utilizaremos estas fórmulas para buscar los centros de gravedad de diversos cuerpos y figuras. Se demuestra que, si un sistema de puntos se puede subdividir en un cierto número de partes disjuntas, su centro de gravedad se obtendrá a partir de los centros de gravedad de las partes materiales, cada una de las cuales está afectada por la masa total de la parte correspondiente.

Volver
Índice

8.12.1. Centro de gravedad de una curva plana

Supongamos que la ecuación $y = f(x)$, $a \le x \le b$, define una curva material *AB*. Sea d la densidad lineal (masa de la unidad de longitud de la curva dada, que supondremos igual en todos los puntos de la curva) de esta curva material. Dividimos la curva en n partes de longitudes Δs_1, ... , Δs_n. Las masas de estas partes serán iguales a los productos de sus longitudes por la densidad lineal

$\Delta m_i = d\ \Delta s_i$. Tomemos un punto arbitrario de abscisa c_i en cada porción de la curva Δs_i. Tomando en cada Δs_i un punto material $P_i[c_i, f(c_i)]$ de masa $d\ \Delta s_i$ y sustituyendo en las fórmulas (3), (4) x_i e y_i por los valores c_i, $f(c_i)$, así como m_i por $d\ \Delta s_i$, obtendremos las fórmulas aproximadas para determinar el centro de gravedad de la curva:

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\ d\ \Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} d\ \Delta s_i} \qquad\qquad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ d\ \Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} d\ \Delta s_i}$$

Si la función $y = f(x)$ es continua, al igual que su derivada, entonces las sumas del numerador y del denominador de cada fracción, para $máx\, \Delta s_i \to 0$, tienen sus límites iguales a los límites de las sumas integrales correspondientes. De este modo las coordenadas del centro de gravedad de la curva se expresan por medio de las integrales definidas:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx} \ , \quad y_c = \frac{\int_a^b f(x)\, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx}$$

Ejemplo

Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, situada por encima del eje *OX*.

Solución:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}\ , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, , \quad ds = \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\, dx = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

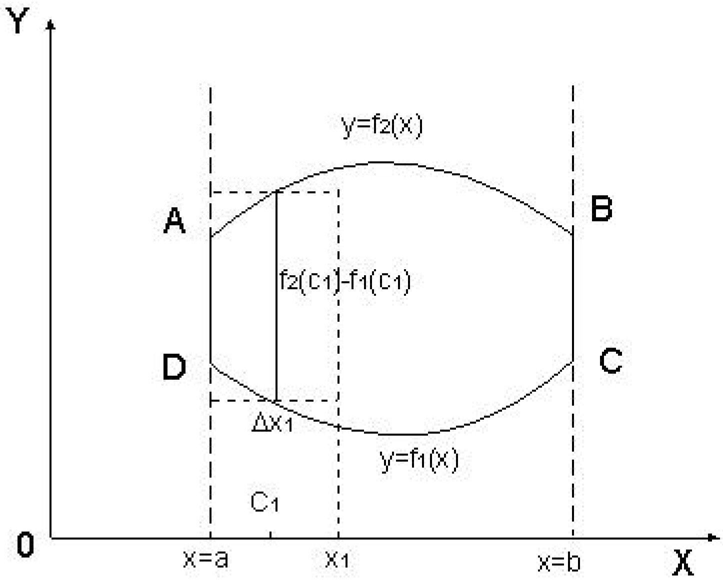
$$x_c = \frac{a\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}} = \frac{\left[-\sqrt{a^2-x^2}\right]_{-a}^{a}}{\left[\text{arcsen}\left(x/a\right)\right]_{-a}^{a}} = \frac{0}{\pi} = 0$$

$$y_c = \frac{\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx}{\pi a} = \frac{\left[ax\right]_{-a}^{a}}{\pi a} = \frac{2a^2}{a\pi} = \frac{2a}{\pi}$$

Volver
Índice

8.12.2. Centro de gravedad de una figura plana

Supongamos que la figura dada, limitada por las curvas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, representa una figura plana material. Consideremos que la densidad superficial (masa de una unidad de área de la superficie) es constante e igual a D en toda la figura. Dividimos la figura dada mediante las rectas $x = x_0 = a$, $x = x_1$, ... , $x = x_n = b$, en bandas paralelas cuyas anchuras son Δx_1, Δx_2, ... , Δx_n.



La masa de cada banda será igual al producto de su área por su densidad superficial *D*. Al sustituir cada banda por un rectángulo de base Δx_i y altura $f_2(c_i) - f_1(c_i)$, donde $c_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, la masa de esta banda será aproximadamente igual a:

$$\Delta m_i = D\,\left[f_2(c_i) - f_1(c_i) \right] \Delta x_i\,, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

El centro de gravedad de esta banda se encuentra, aproximadamente, en el centro del rectángulo correspondiente:

$$(x_i)_c = c_i\,, \qquad (y_i)_c = \frac{f_2(c_i) + f_1(c_i)}{2}$$

Localizando la masa de cada banda en su centro de gravedad, encontremos el valor aproximado de las coordenadas del centro de gravedad de la figura:

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\, D\left[f_2(c_i) - f_1(c_i) \right] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} D\left[f_2(c_i) - f_1(c_i) \right] \Delta x_i}$$

$$y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{f_2(c_i) + f_1(c_i)}{2} D\left[f_2(c_i) - f_1(c_i) \right] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} D\left[f_2(c_i) - f_1(c_i) \right] \Delta x_i}$$

Pasando al límite cuando $\Delta x_i \to 0$, obtendremos las coordenadas exactas del centro de gravedad de la figura dada, convirtiéndose las sumas finitas en sumas integrales:

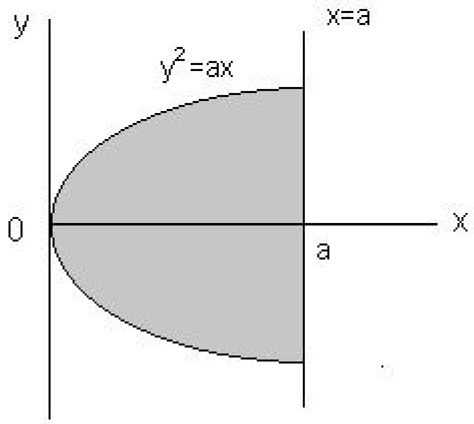
$$x_c = \frac{\int_a^b x\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx}{\int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx} \quad , \quad y_c = \frac{\int_a^b \frac{f_2(x) + f_1(x)}{2}\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx}{\int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx}$$

Estas fórmulas son válidas para toda figura plana homogénea (es decir, aquella con densidad constante en todos sus puntos). Como vemos, las coordenadas del centro de gravedad no dependen de la densidad *D* (pues se ha eliminado en el cálculo).

Ejemplo

Determinar las coordenadas del centro de gravedad del área encerrada por la parábola $y^2 = ax$, y la recta vertical $x = a$.

Solución:



$$f_1(x) = -\sqrt{ax} \quad , \quad f_2(x) = \sqrt{ax}$$

$$x_c = \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\,dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}\,dx} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{a}\left[\sqrt{x^5}\right]_0^a}{\frac{2}{3}\sqrt{a}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^a} = \frac{3}{5}a$$

$y_c = 0$, puesto que el segmento es simétrico respecto al eje *OX*.

8.13. Cálculo de momentos de inercia mediante la integral definida

Volver Índice

8.13.1. Momento de inercia de una curva material

Dado en el plano *OXY* un sistema de puntos materiales $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ... , $P_n(x_n, y_n)$, cuyas masas son respectivamente m_1, m_2, ... , m_n, como sabemos por Mecánica, el momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto al punto 0 se determina del modo siguiente:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 + y_i^2\right)m_i \quad \text{o} \quad I_0 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i \quad \text{con} \quad r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \qquad (5)$$

Sea la curva *AB* dada por su ecuación $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Supongamos que esta curva es material y que su densidad lineal es constante e igual a d. Dividamos una vez más la línea en n puntos de longitudes Δs_1, ... , Δs_n, donde

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Las masas de estas porciones son iguales a los productos de sus longitudes por la densidad lineal, es decir, $\Delta m_i = d\,\Delta s_i$. Tomemos un punto arbitrario de abscisa c_i en cada porción de la curva. La ordenada en ese punto será $p_i = f(c_i)$. El momento de inercia de la curva respecto del origen O será, aproximadamente, según (5):

$$I_0 \approx \sum_{i=1}^{n}\left(c_i^2 + p_i^2\right)\Delta m_i \qquad (6)$$

Si la función $y = f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas, para $máx\,\Delta s_i \to 0$, la suma (6) tiene límite, que se expresa como una integral definida, determinando el momento de inercia de la línea material:

$$I_0 = d\int_a^b \left[x^2 + f(x)^2\right]\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \qquad (7)$$

8.13.2. Momento de inercia de una barra homogénea de longitud L respecto a su extremo

Colocamos una barra de longitud L sobre el eje OX, de tal forma que uno de sus extremos coincida con el origen ($0 \le x \le L$). En este caso

$$\Delta s_i = \Delta x_i\,,\quad \Delta m_i = d\,\Delta x_i\,,\quad r_i^2 = x_i^2$$

La fórmula (7) toma la forma de:

$$I_0 = d\int_0^L x^2 dx = d\frac{L^3}{3} \qquad (8)$$

Volver Índice

Si conocemos la masa M de la barra, entonces la densidad lineal se puede expresar como $d = \dfrac{M}{L}$, y (8) se transforma en:

$$I_0 = \frac{1}{3}ML^2 \qquad (9)$$

8.13.3. Momento de inercia de una circunferencia material de radio r respecto al centro

Puesto que los puntos de la circunferencia se encuentran a la distancia r del centro y su masa es $m = 2\pi r\,d$, entonces:

$$I_0 = mr^2 = d\,2\pi r^3 \qquad (10)$$

Volver
Índice

8.13.4. Momento de inercia de un círculo homogéneo de radio *r* respecto al centro

Sea d la masa de una unidad de área del círculo o densidad superficial. Dividamos el círculo en n anillos. Consideremos uno de esos anillos. Sea r_i su radio interior y $r_i + \Delta r_i$ su radio exterior. La masa Δm_i de este anillo, calculado un error infinitésimo de orden superior a Δr_i, será $\Delta m_i = d\ 2p\ r_i\ \Delta r_i$. En virtud del apartado anterior, el momento de inercia de su masa respecto al centro será aproximadamente igual a:

$$(\Delta I_0)_i \approx d\ 2p\ r_i\ \Delta r_i\ r_i^2 = d\ 2p\ r_i^3\ \Delta r_i$$

El momento de inercia de todo el círculo, considerado como el conjunto de todos los anillos, se expresará mediante:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} d\ 2\pi r_i^3\ \Delta r_i \qquad (11)$$

Pasando al límite, para $máx\,\Delta r_i \to 0$, obtendremos el momento de inercia del área del círculo respecto a su centro:

$$I_0 = d\ 2\pi \int_0^R r^3\ dr = \pi\ d\ \frac{R^4}{2} \qquad (12)$$

Si conocemos la masa M del círculo, entonces, la densidad superficial d se puede expresar como $d = \dfrac{M}{\pi R^2}$.

Introduciendo este valor en (12), obtendremos en definitiva:

$$I_0 = M\ \frac{R^2}{2}$$

Volver
Índice

Ejercicios propuestos para el cálculo de áreas

1) Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = \frac{x^2}{4}$, las rectas verticales $x = 1$, $x = 3$ y el eje *OX*.

Solución: $A = \frac{13}{6}$

2) Calcular el área de la figura limitada entre la curva $y = x(x-2)(x-4)$, las rectas verticales $x = 1$, $x = 3$ y el eje *OX*.

Solución: $A = \frac{7}{2}$

3) Calcular el área de la región limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje *OX*.

Solución: $A = \frac{32}{3}$

4) Calcular el área de la región limitada por la curva de ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje *OX*.

Solución: $A = 8$

5) Calcular el área de la figura limitada entre la curva $x = -y^2 - y + 2$, las ordenadas $y = -1$, $y = 0$ y el eje *OY*.

Solución: $A = \frac{13}{6}$

6) Calcular el área de la figura limitada por la curva $x = y^2 + 4y$ y el eje *OY*.

Solución: $A = \frac{32}{3}$

7) Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

Solución: $A = \dfrac{16}{3}$

8) Calcular el área comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Solución: $A = \dfrac{64}{3}$

9) Calcular el área de la superficie limitada por la parábola $y^2 = 2x$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

Solución: $A = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

10) Calcular el área de un círculo de centro el origen y radio R.

Solución: $A = \pi R^2$

11) Calcular el área de la región limitada por la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y la recta $x = 2a$.

Solución: $A = ab\left(2\sqrt{3} + \text{Log}\left(2 - \sqrt{3}\right)\right)$

12) Calcular el área de la superficie limitada por la curva de ecuación $y = x^2 - 5x + 6$ y el eje OX, cuando y es negativo.

Solución: $A = \dfrac{1}{6}$

13) Calcular el área de la superficie comprendida entre la curva de ecuación $y = x^2$ y la recta de ecuación $y = 2x$.

Solución: $A = \dfrac{4}{3}$

14) Hallar el área de la región limitada por las funciones $f(x)=2-x^2$ y $g(x)=x$.

Solución: $A=\dfrac{9}{2}$

15) Calcular el área de la región limitada por la parábolas $x=-2y^2$, $x=1-3y^2$.

Solución: $A=\dfrac{4}{3}$

16) Las curvas de las funciones seno y coseno se intersecan infinitas veces, dando lugar a regiones de igual área. Calcular el área de una de dichas regiones.

Solución: $A=2\sqrt{2}$

17) Calcular el área de la región limitada por las gráficas $x=3-y^2$, $y=x-1$.

Solución: $A=\dfrac{9}{2}$

18) Hallar el área de la figura comprendida entre la curva $y=4-x^2$ y el eje *OX*.

Solución: $A=\dfrac{32}{3}$

19) Hallar el área del dominio limitado por una semionda de la sinusoide $y=\operatorname{sen}x$ y el eje *OX*.

Solución: $A=2$

20) Calcular el área de la figura comprendida entre la parábola $y=2x-x^2$ y la recta $y=-x$.

Solución: $A=\dfrac{9}{2}$

21) Calcular el área de la figura comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ y la recta $y = 2x$.

Solución: $A = 4$

22) Hallar el área de la figura limitada por la curva $y = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje *OY*.

Solución: $A = 12$

23) Hallar el área del dominio comprendido entre las parábolas $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$.

Solución: $A = \dfrac{4}{3} p^2$

24) Hallar el área total de la figura limitada por las curvas $y = x^3$, $y = 2x$, $y = x$.

Solución: $A = \dfrac{3}{2}$

25) Calcular el área de la figura limitada por la curva $y^3 = x$, la recta $y = 1$ y la vertical $x = 8$.

Solución: $A = \dfrac{17}{4}$

26) Hallar el área de la figura limitada por la catenaria $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$, los ejes *OX*, *OY* y la recta $x = a$.

Solución: $A = \dfrac{a^2}{2e}\left(e^2 - 1\right)$

27) Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

Solución: $A = e + \frac{1}{e} - 2$

28) Calcular el área del recinto formado por los puntos (x, y) que verifican: $x^2 + y^2 \leq 36$, $y^2 \geq 9x$.

Solución: $A = 24\pi - 3\sqrt{3}$

29) Calcular el área limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 9$, $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

Solución: $A = 6\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}$

30) Calcular el área en el primer cuadrante limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 3$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $x = \frac{1}{2}y^2$.

Solución: $A = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2}\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{2}{3}} - \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

31) Calcular el área encerrada por la curva $y = \frac{-x\operatorname{Log}x}{\left(x^2+1\right)^2}$, el eje *OX*, en el semiplano $y \geq 0$.

Solución: $A = \frac{\operatorname{Log}2}{4}$

32) Calcular el área comprendida entre la curva $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ y el eje *OX*.

Solución: $A = a^2\pi$

33) Calcular el área comprendida entre la curva $y^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}$ y sus asíntotas.

Solución: $A = 4$

34) Tomando un punto $M(x_0, y_0)$ en el primer cuadrante que pertenezca a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a > b$, demostrar que el sector de la elipse limitado por el semieje mayor y el segmento que va desde el centro geométrico de la elipse hasta el punto M tiene área igual a $A=\frac{ab}{2}\arccos\frac{x_0}{a}=\frac{ab}{2}\text{arcsen}\frac{y_0}{b}$.

35) Hallar el valor del parámetro a para que el recinto limitado por el eje OX y la curva $y=\cos x$, cuando x varía en el intervalo $[0,\pi/2]$, quede dividido en dos partes con la misma área por la curva $y = a\,\text{sen}x$.

Solución: $a=\frac{3}{4}$

36) Calcular el área de la elipse dada por sus ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}t \end{cases}$.

Solución: $A=ab\pi$

37) Calcular el área comprendida entre el eje OX y un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t-\text{sen}t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$.

Solución: $A=3\pi a^2$

38) Hallar el área de la figura limitada por la hipocicloide $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\text{sen}^3 t \end{cases}$.

Solución: $A=\frac{3}{8}\pi a^2$

39) Hallar el área encerrada por la rosa de tres pétalos $\rho = a\cos 3\theta$.

Solución: $A=\frac{1}{4}\pi a^2$

40) Hallar el área del dominio limitado por un bucle de la curva $\rho = a\,\text{sen}2\theta$.

Solución: $A = \frac{1}{8}\pi a^2$

41) Hallar el área del dominio limitado por la curva $\rho = a\cos\theta$.

Solución: $A = \frac{1}{4}\pi a^2$

42) Hallar el área del dominio limitado por la curva $\rho = a\cos2\theta$.

Solución: $A = \frac{1}{2}\pi a^2$

43) Hallar el área del dominio limitado por la curva $\rho = \cos3\theta$.

Solución: $A = \frac{\pi}{4}$

44) Hallar el área del dominio limitado por la curva $\rho = a\cos4\theta$.

Solución: $A = \frac{1}{2}\pi a^2$

45) Calcular el área total del dominio limitado por la cardioide $\rho = a(1-\cos\theta)$.

Solución: $A = \frac{3}{2}\pi a^2$

46) Calcular el área total del dominio limitado por la cardioide $\rho = a(1+\cos\theta)$.

Solución: $A = \frac{3}{2}\pi a^2$

47) Calcular el área encerrada por la curva $\rho = 2+\cos\theta$.

Solución: $A = \frac{9\pi}{2}$

48) Calcular el área común entre la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$ y el círculo $\rho = 3\cos\theta$.

Solución: $A = \frac{5\pi}{4}$

49) Calcular el área encerrada entre las curvas $\rho = 3\operatorname{sen}\theta$, $\rho = 1 + \cos\theta$.

Solución: $A = \frac{3}{4}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$

50) Calcular el área encerrada entre las dos cardioides $\rho = 1 + \cos\theta$, $\rho = 1 - \cos\theta$.

Solución: $A = \frac{3\pi - 8}{2}$

Volver Índice

Ejercicios propuestos para el cálculo de longitudes de curva

1) Calcular la longitud del arco de curva $y = 2x\sqrt{x}$, entre $x = 0$, $x = 2$.

Solución: $L = \frac{2}{27}\left(\sqrt{19^3} - 1\right)$

2) Calcular la longitud del arco de curva $y = \operatorname{Log}\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, entre $x = 2$, $x = 4$.

Solución: $L = -2 + \operatorname{Log}\frac{e^8 - 1}{e^4 - 1}$

3) Calcular la longitud del arco de parábola $y = 2\sqrt{x}$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Solución: $L = \sqrt{2} + \operatorname{Log}\left(1 + \sqrt{2}\right)$

4) Calcular la longitud del arco de la curva $y = \operatorname{Log} x$, desde $x = \sqrt{3}$ hasta $x = \sqrt{8}$.

Solución: $L = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{3}{2}$

5) Calcular la longitud del arco de una parábola semicúbica $ay^2 = x^3$, comprendido entre el origen de coordenadas y el punto $x = 5a$.

Solución: $L = \frac{335}{27}a$

6) Hallar la longitud del arco de la catenaria $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$, comprendido entre el origen de coordenadas y el punto (x_0, y_0).

Solución: $L = \frac{a}{2}\left(e^{x_0/a} - e^{-x_0/a}\right)$

7) Hallar la longitud del arco de la curva $y = 1 - \operatorname{Log}(\cos x)$, entre los límites $x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$.

Solución: $L = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$

8) Hallar la longitud de un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

Solución: $L = 8a$

9) Calcular la longitud de la astroide $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$.

Solución: $L = 6a$

10) Hallar la longitud de la curva $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sen} t \end{cases}$, entre $t = 0$, $t = 4$.

Solución: $L = \sqrt{2}\left(e^4 - 1\right)$

11) Calcular la longitud de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

Solución: $L = 8a$

12) Hallar la longitud de la primera espira de la espiral de Arquímedes $\rho = a\theta$, a partir del polo.

Solución: $L = a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\mathrm{Log}\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$

13) Hallar la longitud de la espiral logarítmica $\rho = e^{a\theta}$, desde el polo hasta el punto (ρ_0, θ_0).

Solución: $L = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(\rho_0 - 1)$

14) Calcular la longitud de la cardioide $\rho = 2a(1+\cos\theta)$.

Solución: $L = 16a$

15) Calcular la longitud de la curva $\rho = a\,\mathrm{sen}^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Solución: $L = \frac{3a\pi}{2}$

Volver Índice

Ejercicios propuestos para el cálculo de volúmenes

1) Calcular el volumen engendrado por la función $y = \mathrm{sen}x$, al girar alrededor del eje *OX*, cuando el valor de *x* varía entre 0 y π.

Solución: $V = \frac{\pi^2}{2}$

2) Calcular el volumen engendrado por la función $y = \mathrm{sen}x$, al girar alrededor del eje *OY*, cuando el valor de *x* varía entre 0 y π.

Solución: $V = 2\pi^2$

3) Hallar el volumen del sólido formado al girar la región limitada por la gráfica de la función $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ y el eje *OX*, con $0 \leq x \leq \pi$, alrededor del eje *OX*.

Solución: $V = 2\pi$

4) Calcular el volumen generado por la rotación de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, al girar alrededor del eje *OX*.

Solución: $V = \dfrac{4\pi ab^2}{3}$

5) Calcular el volumen engendrado por la revolución alrededor del eje *OX* del área plana comprendida entre $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$.

Solución: $V = 2.500\pi$

6) Hallar el volumen del sólido formado al girar la región limitada por $y = 2 - x^2$, $y = 1$, alrededor del eje $y = 1$.

Solución: $V = \dfrac{16\pi}{15}$

7) Calcular el volumen engendrado al girar el círculo $x^2 + (y-8)^2 = 4$, alrededor del eje *OX*.

Solución: $V = 64\pi^2$

8) Calcular el volumen engendrado por el área plana comprendida entre $y = -x^2 - 3x + 6$, $x + y = 3$, al girar alrededor del eje *OX*.

Solución: $V = \dfrac{1.792\pi}{15}$

9) La figura limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 4$ gira alrededor del eje *OX*. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = 32\pi$

10) Calcular el volumen engendrado por la revolución alrededor de la recta $y = 16$ del área plana comprendida entre $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 16$.

Solución: $V = \dfrac{4.096\pi}{15}$

11) Calcular el volumen engendrado por la revolución alrededor del eje OY del área plana comprendida entre $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Solución: $V = \pi\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)$

12) Calcular el volumen engendrado al girar la superficie limitada por la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, el eje OX y la recta $x = 1$, alrededor del eje OY.

Solución: $V = \dfrac{4\pi}{7}$

13) El segmento de la recta que une el origen de coordenadas con el punto (a,b) gira alrededor del eje OY. Hallar el volumen del cono engendrado.

Solución: $V = \dfrac{\pi}{3}a^2 b$

14) El área limitada por las curvas $y^2 = 2px$, $x = a$, gira alrededor del eje OX. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = \pi p a^2$

15) La figura limitada por la curva $y = xe^x$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$, gira alrededor del eje OX. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = \dfrac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$

16) La figura limitada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ gira alrededor del eje OX. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = \dfrac{32}{105}\pi a^3$

17) Calcular el volumen del elipsoide de revolución $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\, t \end{cases}$, al girar alrededor del semieje mayor ($a > b$).

Solución: $V = \dfrac{4}{3}\pi a b^2$

18) La figura limitada por un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \text{sen}\, t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ y el eje OX gira alrededor del eje OX. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = 5\pi^2 a^3$

19) La figura limitada por un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \text{sen}\, t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ y el eje OX gira alrededor del eje OY. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = 6\pi^3 a^3$

20) La figura limitada por un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \text{sen}\, t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ y el eje OX gira alrededor de una recta que es paralela al eje OY y pasa por el vértice de la cicloide. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = \dfrac{\pi a^3}{6}\left(9\pi^2 - 16\right)$

21) La figura limitada por un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \text{sen}\, t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ y el eje OX gira alrededor de una recta que es paralela al eje OX y pasa por el vértice de la cicloide. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = 7\pi^2 a^3$

Volver
Índice

Ejercicios propuestos para el cálculo de áreas laterales

1) Calcular el área lateral de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje *OX* de la parábola $y^2 = 4x$, entre los valores $x = 0$, $x = 2$.

Solución: $S = \frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right)$

2) Calcular el área lateral de la superficie engendrada por la revolución de la curva $y = x^3$, entre los valores $x = 0$, $x = 3$, alrededor del eje *OX*.

Solución: $S = \frac{\pi}{27}\left(730\sqrt{730} - 1\right)$

3) Hallar el área lateral de la superficie obtenida por la revolución de la parábola $y^2 = 4ax$, alrededor del eje *OX*, desde el origen hasta el punto $x = 3a$.

Solución: $S = \frac{56}{3}\pi a^2$

4) Hallar el área lateral de la superficie del cono engendrado por la revolución de un segmento de la recta $y = 2x$, limitado por $x = 0$, $x = 2$, alrededor del eje *OX*.

Solución: $S = 8\pi\sqrt{5}$

5) Hallar el área lateral de la superficie de revolución engendrada por el círculo $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ $(b > a)$ al girar alrededor del eje *OX*.

Solución: $S = 4\pi^2 ab$

6) El arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$, gira alrededor del eje *OX*. Hallar el área lateral del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $S = 4\pi\left[\sqrt{2} + \operatorname{Log}\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$

7) La elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a > b$) gira alrededor del eje OX. Hallar el área lateral del cuerpo de revolución engendrado.

$$\textit{Solución: } S = 2\pi b^2 + 2\pi ab\frac{\text{arcsen}\, e}{e} \qquad \left(\text{donde} \quad e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$$

8) Calcular el área lateral de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje OY del arco de la curva $x = y^3$, entre los valores $y = 0$, $y = 1$.

$$\textit{Solución: } S = \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

9) Calcular el área lateral de la superficie engendrada por la revolución de la curva $y=\dfrac{x^3}{3}$, entre los valores $x = 0$, $x = 3$, alrededor del eje OX.

$$\textit{Solución: } S = \frac{\pi}{9}\left(82\sqrt{82}-1\right)$$

10) Calcular el área lateral de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje OX de la cardioide $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\,\text{sen}\, t - \text{sen}\, 2t) \end{cases}$.

$$\textit{Solución: } S = \frac{128}{5}\pi a^2$$

11) Hallar el área lateral de la superficie del cuerpo obtenido por la revolución de un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \text{sen}\, t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$, alrededor del eje OX.

$$\textit{Solución: } S = \frac{64}{3}\pi a^2$$

12) Hallar el área lateral de la superficie del cuerpo obtenido por la revolución de un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \text{sen}\, t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$, alrededor del eje OY.

$$\textit{Solución: } S = 16\pi^2 a^2$$

13) El astroide $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\text{sen}^3 t \end{cases}$ gira alrededor del eje *OX*. Hallar el área lateral del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $S = \dfrac{12}{5}\pi a^2$

14) Calcular el área lateral engendrada por la curva $\begin{cases} x = e^t \text{sen}\, t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, al girar alrededor del eje *OX*, entre los valores $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Solución: $S = \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{5}\left(e^{\pi} - 2\right)$

Volver
Índice

Ejercicios propuestos para el cálculo de centros de gravedad

1) Calcular las coordenadas del centro de gravedad del arco de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$, con $y \geq 0$.

Solución: $(x_c, y_c) = (0, 4/\pi)$

2) Calcular las coordenadas del centro de gravedad del área encerrada por un cuadrante de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución: $(x_c, y_c) = \left(\dfrac{4a}{3\pi}, \dfrac{4b}{3\pi}\right)$

3) Calcular las coordenadas del centro de gravedad del área comprendida entre la parábola $y = 4 - x^2$, la parte positiva del eje *OX* y la parte positiva del eje *OY*.

Solución: $(x_c, y_c) = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{8}{5}\right)$

4) Calcular las coordenadas del centro de gravedad del área comprendida entre las parábolas $y^2 = x$, $x^2 = -8y$

Solución: $(x_c, y_c) = \left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{-9}{10}\right)$

Volver
Índice

Capítulo 9
Integrales impropias

$$\int_a^t f(x)dx \to \int_a^{\infty} f(x)dx \; (t \to \infty)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_a^t f(x)dx \to \int_a^b f(x)dx \; (t \to b)$$

Capítulo 9
Integrales impropias

Hasta ahora hemos realizado todo el estudio sobre las integrales definidas bajo dos hipótesis fundamentales, el hecho de que los límites de integración eran finitos y la continuidad de la función a integrar, $f(x)$, en el intervalo de integración $[a\ ,\ b]$. Cuando alguna de esas dos condiciones no se cumple, se dice que la integral que resulta es *impropia*.

Estudiaremos estos casos por separado, viendo como conclusión el caso general en el que pudieran no cumplirse estas dos hipótesis a la vez.

Volver
Índice

9.1. Límites de integración infinitos

En este primer caso, supondremos que la función a integrar, $f(x)$, está definida y es continua en un intervalo no acotado. Esta situación puede darse de tres maneras distintas: que el límite superior de integración sea infinito, que el límite inferior de integración sea menos infinito, o que ninguno de los límites de integración sea finito. Veamos cada una de estas tres posibilidades:

1) Si $f(x)$ es continua en $[a\ ,\ \infty) \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$

donde $\int_a^t f(x)\,dx$ es una integral definida.

2) Si $f(x)$ es continua en $(-\infty\ ,\ a] \Rightarrow \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$

donde $\int_t^a f(x)\,dx$ es una integral definida.

3) Si $f(x)$ es continua para todo x real y a es un número real cualquiera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

y cada una de las integrales impropias del miembro de la derecha, se calcularán según lo viso en los caso 1) y 2).

Es decir, en cualquier caso, para calcular una integral impropia, primero pasamos a calcular una integral definida dependiendo de un parámetro *t* que haremos tender a más o menos infinito, según el caso. Así pues, el cálculo del valor de una integral impropia se reduce al cálculo de manera consecutiva de una integral definida y de un límite. Debido, precisamente, a la operación del cálculo del límite de una función, este límite puede ser real (convergencia) o puede ser infinito (divergencia). Esta situación da lugar a la siguiente clasificación en las integrales impropias: cuando los límites de 1) y 2) existan, se dirá que las integrales *convergen*; si no existen (son infinito), se dirá que *divergen*. En 3) la integral de la izquierda se dice que converge si y solo si convergen las dos de la derecha (si una de ellas diverge independientemente de la otra, también será divergente la de la izquierda).

Ejemplos

Volver caso 1)

1) $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$

El límite superior de integración toma valor no finito. Así pues, según el caso 1), tenemos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^{t} \frac{dx}{x^2+9}$$

Calculamos primero la integral definida con límite de integración superior igual a *t*:

$$\int_0^{t} \frac{dx}{x^2+9} = \int_0^{t} \frac{1/9}{(x/3)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\big[\operatorname{arctg}(x/3)\big]_0^t = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(t/3)$$

Por último, calculamos el límite cuando *t* tiende a más infinito de esta función:

$$\frac{1}{3}\lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg}(t/3) = \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Por tanto, I es convergente y su valor es $I = \frac{\pi}{6}$.

Volver caso 2)

2) $I = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

El límite inferior de integración toma valor no finito. Así pues, según el caso 2), tenemos:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Calculamos primero la integral definida con límite de integración inferior igual a t:

$$\int_{t}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_{t}^{0} (1-x)^{-1/2}\, dx = -2\left[(1-x)^{1/2}\right]_{t}^{0} = -2 + 2\sqrt{1-t}$$

Por último, calculamos el límite cuando t tiende a menos infinito de esta función:

$$\lim_{t\to-\infty} \left(-2 + 2\sqrt{1-t}\right) = -2 + \infty = \infty$$

Por tanto, I es divergente y su valor es $I = \infty$.

Volver caso 3)

3) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, 2^{-x^2}\, dx$

En este caso los dos límites de integración son no finitos. Así pues, según el caso 3), separamos esta integral en suma de otras dos por un punto cualquiera intermedio, por ejemplo, el cero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, 2^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} x\, 2^{-x^2}\, dx + \int_{0}^{+\infty} x\, 2^{-x^2}\, dx$$

Calculamos cada una de estas dos nuevas integrales impropias según los casos 1) o 2). Por tanto:

$$\int_{-\infty}^{0} x\, 2^{-x^2}\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} x\, 2^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \lim_{t \to -\infty} \left[\frac{2^{-x^2}}{\mathrm{Log}\, 2} \right]_t^0 =$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left[-\frac{1}{2\mathrm{Log}2} + \frac{2^{-t^2}}{2\mathrm{Log}2} \right] = -\frac{1}{2\mathrm{Log}\, 2}$$

$$\int_{0}^{+\infty} x\, 2^{-x^2}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{0}^{t} x\, 2^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{2^{-x^2}}{\mathrm{Log}\, 2} \right]_0^t =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{2^{-t^2}}{2\mathrm{Log}2} + \frac{1}{2\mathrm{Log}2} \right] = \frac{1}{2\mathrm{Log}2}$$

Por tanto, I es convergente y su valor es $I = -\frac{1}{2\mathrm{Log}2} + \frac{1}{2\mathrm{Log}\, 2} = 0$.

9.2. Integrales con integrando que tiende a infinito

Volver Índice

En este segundo caso supondremos que la función a integrar, $f(x)$, tiene una discontinuidad infinita para algún valor en el intervalo de integración cerrado y acotado, $[a\, ,\, b]$. Así, tenemos tres posibilidades:

1) Si $f(x)$ es continua en $[a\, ,\, b)$, y $|f(x)| \to \infty$, cuando $x \to b^-$, entonces:

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{t \to b^-} \int_{a}^{t} f(x)\, dx$$

donde $\int_a^t f(x)\,dx$ es una integral definida.

2) Si $f(x)$ es continua en $(a\ ,b]$, y $|f(x)| \to \infty$, cuando $x \to a^+$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

donde $\int_t^b f(x)\,dx$ es una integral definida.

3) Si $|f(x)| \to \infty$, cuando $x \to c$, con $a < c < b$ y $f(x)$ es continua en todos los demás puntos del intervalo $[a\ ,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

donde cada una de las integrales impropias del miembro de la derecha se calculan según lo visto en los casos 1) y 2) anteriores.

Al igual que en el caso en que aparecían límites de integración infinitos, para calcular una integral impropia en cualquiera de estas tres situaciones mencionadas, primero tendremos que calcular una integral definida dependiendo de un parámetro t que posteriormente haremos tender al valor real donde se produce la discontinuidad infinita de la función a integrar. Así pues, el cálculo del valor de una integral impropia se reduce de nuevo al cálculo de manera consecutiva de una integral definida y de un límite. También aquí diremos que las integrales impropias *convergen* si existen (son finitos) los límites anteriores, y se dirá que *divergen* en caso contrario. En el caso 3) la integral impropia de la izquierda se dice que converge si y solo si convergen las dos de la derecha (si una de ellas diverge independientemente de la otra, también será divergente la de la izquierda).

Ejemplos

Volver
caso 1)

1) $I = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

La función a integrar en este caso presenta una discontinuidad infinita dentro del intervalo de integración en el punto $x = 4$. Así pues, según el caso 1), tenemos:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \lim_{t \to 4^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Calculamos primero la integral definida con límite de integración superior igual a t:

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \int_0^t \frac{1/4}{\sqrt{1 - (x/4)^2}}\, dx = \left[\operatorname{arcsen}(x/4)\right]_0^t =$$

$$= \operatorname{arcsen}(t/4) - \operatorname{arcsen} 0 = \operatorname{arcsen}(t/4)$$

Por último, calculamos el límite cuando t tiende a 4 por la izquierda de esta función:

$$\lim_{t \to 4^-} \left(\operatorname{arcsen}(t/4)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, I es convergente y su valor es $I = \frac{\pi}{2}$.

Volver
caso 2)

2) $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x - 1}}$

En este caso, la función a integrar presenta una discontinuidad infinita dentro del intervalo de integración en el punto $x = 1$. Así pues, según el caso 2), tenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

Calculamos primero la integral definida con límite de integración superior igual a *t*:

$$\int_t^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \int_t^2 (x-1)^{-1/2}\,dx = \left[\frac{(x-1)^{1/2}}{1/2}\right]_t^2 = 2\left[1-\sqrt{t-1}\right]$$

Por último, calculamos el límite cuando t tiende a 1 por la derecha de esta función:

$$\lim_{t\to 1^+} 2\left[1-\sqrt{t-1}\right] = 2$$

Por tanto, I es convergente y su valor es $I = 2$.

Volver caso 3)

3) $I = \displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

En este caso, la función a integrar presenta una discontinuidad infinita dentro del intervalo de integración en el punto $x = 1$. Así pues, según el caso 3), tenemos:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Cada una de las integrales del miembro de la derecha se calcula según lo visto para el caso 1) o 2).

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t (x-1)^{-1/3}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{t \to 1^-} \left[(x-1)^{2/3} \right]_0^t = -\frac{3}{2}$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{t \to 1^+} \int_t^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{t \to 1^+} \int_0^t (x-1)^{-1/3}\, dx =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{t \to 1^+} \left[(x-1)^{2/3} \right]_t^4 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{9}$$

Por tanto, I es convergente y su valor es $I = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9} - 1\right)$.

Volver Índice

9.3. Observaciones a las integrales impropias

Observación 1: Los casos que se han comentado en los apartados anteriores se han referido a situaciones simples. En general, varias de esas situaciones se pueden producir a la vez en una misma integral. Es posible que en una misma integral aparezca algún límite de integración infinito y que la función a integrar posea una discontinuidad infinita en algún punto dentro del intervalo de integración. Para determinar si converge o no esta integral impropia hay que separarla como la suma de tantas integrales impropias como sea necesario, de forma que cada una de ellas solamente posea un punto de impropiedad en algún límite de integración. Esta separación, obviamente, se realizará a través de puntos interiores del intervalo, en los cuales la función a integrar sea continua. Si convergen todas las integrales impropias en que se haya separado la integral original, entonces ésta será convergente. Si, al menos, alguna de ellas es divergente, entonces también lo será la original.

Ejemplos

1) $I = \int_{-\infty}^{6} \frac{dx}{(4-x)^2}$

En este caso tenemos un límite de integración no finito, junto con un valor numérico, $x = 4$, en el cual la función a integrar presenta una discontinuidad infinita. Así pues, la descomponemos como sigue:

$$\int_{-\infty}^{6} \frac{dx}{(4-x)^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(4-x)^2} + \int_{0}^{4} \frac{dx}{(4-x)^2} + \int_{4}^{6} \frac{dx}{(4-x)^2}$$

donde se ha elegido el punto interior $x = 0$, de continuidad de la función, para separar la integral. Calculemos cada una de ellas por separado:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{t\to -\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{t\to -\infty} \int_{t}^{0} (4-x)^{-2}\, dx = \lim_{t\to -\infty} \left[\frac{-1}{4-x} \right]_t^0 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \lim_{t\to -\infty} \left(\frac{1}{4-t} \right) = -\frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{4} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{t\to 4^-} \int_{0}^{t} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{t\to 4^-} \int_{0}^{t} (4-x)^{-2}\, dx = \lim_{t\to 4^-} \left[\frac{-1}{4-x} \right]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to 4^-} \left(\frac{-1}{4-t} \right) + \frac{1}{4} = -\infty + \frac{1}{4} = -\infty$$

Como esta integral es divergente, no es necesario calcular la tercera integral de la descomposición, ya se que se concluye que I es divergente.

2) $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\text{Log} x}{\sqrt{1-x}}\, dx$

Aquí existen dos valores numéricos dentro del intervalo, $x = 0$, $x = 1$, en el cual la función a integrar presenta una discontinuidad infinita. Así pues, la descomponemos como sigue:

$$\int_{0}^{1} \frac{\text{Log} x}{\sqrt{1-x}}\, dx = \int_{0}^{1/2} \frac{\text{Log} x}{\sqrt{1-x}}\, dx + \int_{1/2}^{1} \frac{\text{Log} x}{\sqrt{1-x}}\, dx$$

donde se ha elegido el punto interior $x = 1/2$, de continuidad de la función, para separar la integral. Vamos a calcular en primer lugar la integral indefinida de la función:

$$\int \frac{\text{Log}x}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{lcl} u = \text{Log}x & \Rightarrow & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = (1-x)^{-1/2}\,dx & \Rightarrow & v = -2\sqrt{1-x} \end{array} \right\} =$$

$$= -2\text{Logx}\,\sqrt{1-x} + 2\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx$$

Calculemos la nueva integral indefinida que nos ha aparecido aparte:

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx = \left\{1-x=t^2 \Rightarrow dx = -2t\,dt\right\} = -2\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{1-t^2-1}{1-t^2}\,dt = 2t - 2\int \frac{dt}{1-t^2} = 2t - \text{Log}\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{1-x} - \text{Log}\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{1-x} - \text{Log}\left|\frac{\left(1+\sqrt{1-x}\right)^2}{x}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{1-x} - 2\text{Log}\left|1+\sqrt{1-x}\right| + \text{Log}x + C$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\text{Log}x}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\text{Log}x\,\sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} - 4\text{Log}\left|1+\sqrt{1-x}\right| + 2\text{Log}x + C =$$
$$= F(x) + C$$

Así, procedemos ahora a calcular las dos integrales impropias en que hemos separado la integral original I:

$$\int_{0}^{1/2} \frac{\mathrm{Log}x}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1/2} \frac{\mathrm{Log}x}{\sqrt{1-x}}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[-2\mathrm{Log}x\,\sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} - 4\mathrm{Log}\left|1+\sqrt{1-x}\right| + 2\mathrm{Log}x\right]_{t}^{1/2} =$$

$$= F\left(\frac{1}{2}\right) - \lim_{t\to 0^+}\left[-2\mathrm{Log}t\,\sqrt{1-t} + 4\sqrt{1-t} - 4\mathrm{Log}\left|1+\sqrt{1-t}\right| + 2\mathrm{Log}t\right] =$$

$$= F\left(\frac{1}{2}\right) - 4 + 4\mathrm{Log}2$$

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{Log}x}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_{1/2}^{t} \frac{\mathrm{Log}x}{\sqrt{1-x}}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\left[-2\mathrm{Log}x\,\sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} - 4\mathrm{Log}\left|1+\sqrt{1-x}\right| + 2\mathrm{Log}x\right]_{1/2}^{t} =$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\left[-2\mathrm{Log}t\,\sqrt{1-t} + 4\sqrt{1-t} - 4\mathrm{Log}\left|1+\sqrt{1-t}\right| + 2\mathrm{Log}t\right] - F\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -F\left(\frac{1}{2}\right)$$

Finalmente, $I = -4 + 4\mathrm{Log}2$.

Observación 2: Otra observación importante que debemos hacer está dirigida al error bastante frecuente consistente en:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to +\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

La operación correcta, como hemos comentado en la observación 1, sería realizar la separación en dos integrales impropias de la forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

donde a debe ser un punto de continuidad para la función $f(x)$. Cada una de estas integrales impropias se calculará como en los casos anteriores.

Observación 3: La separación $\int_a^b \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ sólo se puede realizar en integrales impropias si son convergentes las dos integrales de la derecha.

Observación 4: Cuando existe un punto de discontinuidad infinita de la función a integrar estrictamente interior al intervalo de integración, hay que llevar cuidado de partir la integral por ese punto. Si no se procede de esta manera, se puede llegar a resultados falsos. Por ejemplo, sea $I = \int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3}$, donde el valor de $x = 0$, estrictamente interior al intervalo, es el único punto de discontinuidad infinita de la función a integrar. La manera correcta de proceder sería:

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{x^3}$$

Calculamos la primera de estas integrales impropias:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} x^{-3}\,dx = \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_{-1}^{t} = \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{-1}{2t^2} \right] + \frac{1}{2} = -\infty$$

Por tanto, I es divergente.

Si no nos damos cuenta de que es impropia y la intentamos calcular como definida, llegaremos a:

$$I = \int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3} = \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_{-1}^{2} = \frac{-1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

que es bastante diferente al resultado correcto obtenido anteriormente.

Volver
Índice

Ejercicios propuestos

1) $I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \mathrm{Log}\left(2+\sqrt{3}\right)$

2) $I = \int_0^1 x^2 \mathrm{Log}x\, dx = -\frac{1}{9}$

3) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

4) $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 1$

5) $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \qquad (a > 0)$

6) $I = \int_0^1 \mathrm{Log}x\, dx = -1$

7) $I = \int_1^{33} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} = 20$

8) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \frac{\pi}{2}$

9) $I = \int_1^{\infty} (1-x)\, e^{-x}\, dx = -\frac{1}{e}$

10) $I = \int_0^{2} \frac{dx}{2-x} = \infty$

11) $I = \int_0^{4} \frac{dx}{(x-1)^2} = \infty$

12) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\, dx = 2$

13) $I = \int_0^{1} \frac{dx}{1-x} = \infty$

14) $I = \int_0^{\pi/2} \sec x\, dx = \infty$

15) $I = \int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx = \frac{1}{2}$

16) $I = \int_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

17) $I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\operatorname{Log} x)^2} = \frac{1}{\operatorname{Log} 2}$

18) $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4} = \infty$

19) $I = \int_{0}^{4} \frac{dx}{4-x} = \infty$

20) $I = \int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x\,\mathrm{Log}x} = \infty \qquad (a > 1)$

21) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$

Tabla de integrales

Volver
Índice

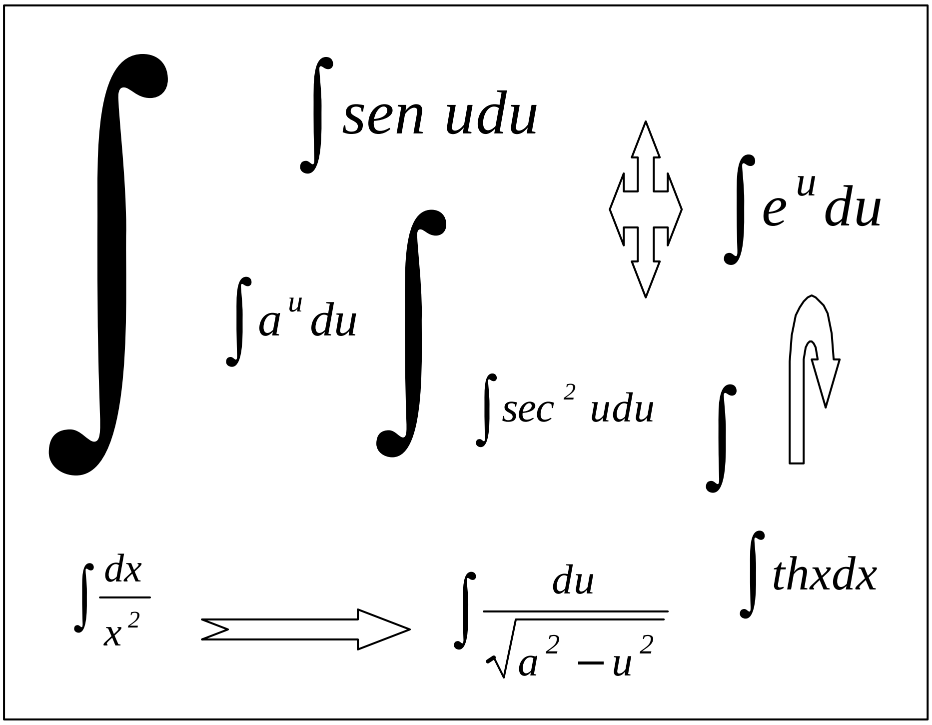


TABLA DE INTEGRALES

1) $\int \frac{d}{dx}\left[f(x) \right] dx = f(x) + C$	
2) $\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$	
3) $\int k\ f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$	$k = cte.$
4) $\int f'(x) f(x)^m\, dx = \frac{\left[f(x) \right]^{m+1}}{m+1} + C$	$m \neq -1$
5) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \text{Log} \left| f(x) \right| + C$	
6) $\int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\text{Log} a} + C$	
7) $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$	
8) $\int f'(x) \text{sen}\left[f(x) \right] dx = -\cos\left[f(x) \right] + C$	
9) $\int f'(x) \cos\left[f(x) \right] dx = \text{sen}\left[f(x) \right] + C$	

10) $\int f'(x)\,\mathrm{tg}[f(x)]\,dx = -\mathrm{Log}\left\|\cos[f(x)]\right\| + C$
11) $\int f'(x)\,\mathrm{cotg}[f(x)]\,dx = \mathrm{Log}\left\|\mathrm{sen}[f(x)]\right\| + C$
12) $\int f'(x)\sec[f(x)]\,dx = \mathrm{Log}\left\|\sec[f(x)] + \mathrm{tg}[f(x)]\right\| + C$
13) $\int f'(x)\,\mathrm{cosec}[f(x)]\,dx = \mathrm{Log}\left\|\mathrm{cosec}[f(x)] - \mathrm{cotg}[f(x)]\right\| + C$
14) $\int f'(x)\sec^2[f(x)]\,dx = \mathrm{tg}[f(x)] + C$
15) $\int f'(x)\,\mathrm{cosec}^2[f(x)]\,dx = -\mathrm{cotg}[f(x)] + C$
16) $\int f'(x)\sec[f(x)]\,\mathrm{tg}[f(x)]\,dx = \sec[f(x)] + C$
17) $\int f'(x)\,\mathrm{cosec}[f(x)]\,\mathrm{cotg}[f(x)]\,dx = -\mathrm{cosec}[f(x)] + C$
18) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}}\,dx = \mathrm{arcsen}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + C$

19) $\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = \arccos\left(\frac{f(x)}{a}\right) + C$	
20) $\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + C$	
21) $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}\,dx = \frac{[f(x)]^{1-n}}{1-n} + C$	$n \neq 1$
22) $\int \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{argth}[f(x)] + C = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{\lvert 1+x \rvert}{\lvert 1-x \rvert} + C$	
23) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2+1}}\,dx = \operatorname{argsh}[f(x)] + C = \operatorname{Log}\left\lvert x+\sqrt{x^2+1}\right\rvert + C$	
24) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}\,\mathrm{dx} = \operatorname{argch}[f(x)] + C = \operatorname{Log}\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$	
25) $\int f'(x)\operatorname{sh}[f(x)]\,dx = \operatorname{ch}[f(x)] + C$	
26) $\int f'(x)\operatorname{ch}[f(x)]\,dx = \operatorname{sh}[f(x)] + C$	
27) $\int f'(x)\operatorname{th}[f(x)]\,dx = \operatorname{Log}\lvert\operatorname{ch}[f(x)]\rvert + C$	

28) $\int \frac{f'(x)}{\mathrm{ch}^2[f(x)]}dx = \mathrm{th}[f(x)] + C$
29) $\int f'(x)\,\mathrm{sech}[f(x)]\,dx = 2\mathrm{arctg}\,e^{f(x)} + C$
30) $\int f'(x)\,\mathrm{cosech}[f(x)]\,dx = \mathrm{Log}\lvert \mathrm{th}[f(x)/2]\rvert + C$
31) $\int f'(x)\,\mathrm{argsh}\left(\frac{f(x)}{a}\right)dx = f(x)\,\mathrm{argsh}\left(\frac{f(x)}{a}\right) - \sqrt{[f(x)]^2 + a^2} + C$
32) $\int f'(x)\,\mathrm{argch}\left(\frac{f(x)}{a}\right)dx = f(x)\,\mathrm{argch}\left(\frac{f(x)}{a}\right) \pm \sqrt{[f(x)]^2 - a^2} + C$ $\left(- \; si \;\; \mathrm{argch}\left(\frac{f(x)}{a}\right) > 0; \;\; + \; si \;\; \mathrm{argch}\left(\frac{f(x)}{a}\right) < 0\right)$
33) $\int f'(x)\,\mathrm{argth}\left(\frac{f(x)}{a}\right)dx = f(x)\,\mathrm{argth}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + \frac{a}{2}\mathrm{Log}\lvert f^2(x) - a^2\rvert + C$

Volver
Índice

Bibliografía

APÓSTOL, T.M., *Análisis matemático*. Reverté, 1982
APÓSTOL, T.M., *Calculus*. Reverté, 1989
BOMBAL, F. y otros, *Problemas de análisis matemático*. AC, 1987
BURGOS, J., *Cálculo infinitesimal de una variable*. McGraw-Hill, 1994
COQUILLAT, F., *Cálculo Integral. Metodología y problem*as. Tebar Flores, 1980
DEMIDOVICH, B.P., *5.000 problemas de análisis matemático*. Paraninfo, 1987
GARCÍA CASTRO, F. y GUTIÉRREZ GÓMEZ, A., *Cálculo infinitesimal.* Pirámide, 1992
KITCHEN, J.W., *Cálculo*. McGraw-Hill, 1986
LARSON/HOSTETLER/EDWARDS, *Cálculo y geometría analítica*. McGraw-Hill, 1995
LEGUA, M., SÁNCHEZ, L., *Cálculo integral y aplicaciones*. Servicio de Publicaciones Universidad Politécnica de Valencia, 1995
PISKUNOV, N., *Cálculo diferencial e integral.* Mir, 1977
PUIG ADAM, R., *Cálculo integral.* Biblioteca Matemática, 1976
QUINET, J., FAURE, P., *Cours élémentaire de mathématiques supérieures*. Dunod, 1980
RUDIN, W., *Principios de análisis matemático*. McGraw-Hill, 1980
SALAS, S.L., HILLE, E., *Calculus*. Reverté, 1995
SOLER, M., BRONTE, R., MARCHANTE, L., *Cálculo infinitesimal e integral.* Los autores, 1992
SPIVAK, M., *Cálculo infinitesimal.* Reverté, 1989